COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2017 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Definito il numero E come: $E = \int_0^1 xe^x dx$, dimostrare che risulta: $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E$ esprimere $\int_0^1 x^3 e^x dx$ in termini di e ed E.

Cerchiamo una primitiva di xe^x integrando per parti:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = xe^x - e^x + c$$

Risulta quindi:

$$E = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = e - e - (0 - e^0) = 1$$

Calcoliamo una primitiva di $x^2 e^x$ integrando ancora per parti:

$$\int x^2 e^x dx = x^2\, e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx = x^2\, e^x - 2 \int x \cdot e^x\, dx$$

Quindi:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 xe^x dx = [e - 0] - 2E = e - 2E$$

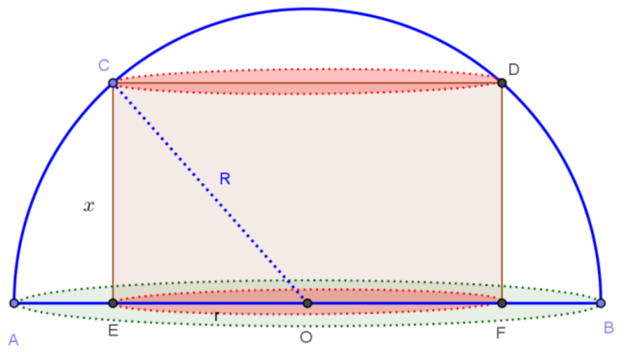
Calcoliamo infine $\int_0^1 x^3 e^x dx$: (sempre per parti):

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = [x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = e - 3\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 3(e - 2E) = 6E - 2e.$$

QUESITO 2

Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con x l'altezza del cilindro $(0 \le x \le R)$; risulta: $V(sfera) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$ e $V(cilindro) = \pi r^2 h$.



Si ha: $r^2 = R^2 - x^2$, quindi: $V(cilindro) = \pi r^2 h = \pi(R^2 - x^2)x$

Determiniamo il massimo volume del cilindro, trovando il massimo della funzione:

$y = (R^2 - x^2)x = (R^2 - x^2)(x^2)^{\frac{1}{2}} = max$

Per via elementare:

La funzione y è data dal prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante, quindi è massima se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{R^2 - x^2}{1} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}}, \quad 3x^2 = R^2, \quad x = R\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Il volume massimo del cilindro è quindi:

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{1}{3}R^2\right)R\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi\,R^3$$

I 3/5 del volume della semisfera sono:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{5}\pi R^3$$

Dobbiamo verificare che $\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{5}$. Risulta $\frac{2}{9}\sqrt{3} \cong 0.38 < \frac{2}{5} = 0.40$.

Quindi la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

Usando le derivate:

Cerchiamo il massimo della funzione $y = (R^2 - x^2)x \;, \; per \;\; 0 \le x \le R$.

$y' = -2x^2 + R^2 - x^2 = -3x^2 + R^2 \ge 0 \;\; se \; -R\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le R\frac{\sqrt{3}}{3}$. La funzione è quindi crescente da 0 ad $R\frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente da $R\frac{\sqrt{3}}{3}$ ad R: il massimo assoluto si ha per $x = R\frac{\sqrt{3}}{3}$. Poi si procede come nella discussione per via elementare.

QUESITO 3

Sapendo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b.

Siccome il numeratore per x=0 vale $\sqrt{2b}-6$, ed il denominatore vale 0, deve essere:

$\sqrt{2b}-6=0$, altrimenti il limite sarebbe infinito. Quindi: $\sqrt{2b}=6,\ 2b=36,\ b=18$

Quindi il limite assume la forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+36}-6}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sqrt{\frac{ax}{36}+1}-6}{x} = \lim_{x\to 0} 6\left(\frac{\sqrt{\frac{ax}{36}+1}-1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} 6\cdot\frac{a}{36}\left(\frac{\sqrt{\frac{ax}{36}+1}-1}{\frac{ax}{36}}\right) = \frac{a}{6}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{12} = 1 \quad se \quad a = 12$$

Abbia usato il limite notevole: $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k}$.

I valori richiesti sono quindi $a = 12 \quad e\ b = 18$.

Metodo alternativo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{ax+2b}-6\right)\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)}{x\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{ax+2b-36}{x\left(\sqrt{ax+2b}+6\right)}$$

Deve essere $\sqrt{2b}-6=0$, altrimenti il limite sarebbe infinito. Quindi:

$\sqrt{2b}=6,\ 2b=36,\ b=18$. Pertanto il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\left(\sqrt{ax+36}+6\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{\left(\sqrt{ax+36}+6\right)} = \frac{a}{12} = 1 \quad se \quad a = 12.$$

QUESITO 4

Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0, 2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$.

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?
Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?
Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Il valor medio è dato da: $\int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right)dx =$

$$= \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right]_0^2 = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5} = valor\ medio$$

Trattandosi di una variabile aleatoria continua, la probabilità che assuma un dato valore è 0: la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3 è 0.

La probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1 in *[0, 2]* è data da:

$$p(X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = p(X < 1)$$

QUESITO 5

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = sen(x) + cos\,(x)$$

nel punto di ascissa $x_0 = \pi$.

La retta richiesta ha equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Quindi:

$f'(x) = cos(x) - sen\,(x), \quad f(\pi) = -1, \quad f'(\pi) = -1,$

$y + 1 = -(x - \pi).$

La tangente richiesta ha equazione: $y = -x + \pi - 1$.

QUESITO 6

Determinare il numero reale a in modo che il valore di $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$ *sia un numero reale non nullo.*

Osserviamo che essendo a un numero reale, il limite è da intendersi per $x \to 0^+$, altrimenti non avrebbe senso x^a.

1) Utilizzando lo **sviluppo in serie** di $sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ abbiamo:

$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^a} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^a} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0} x^{3-a} \neq 0$ se $3-a=0, a=3$

Il limite è un numero reale non nullo se a=3 (ed è $-\frac{1}{6}$).

2) Osserviamo che, per avere un valore non nullo, deve essere $a > 0$, pertanto il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizziamo la regola di De L'Hôpital (di cui sono facilmente verificabili le ipotesi: numeratore e denominatore funzioni continue e derivabili in un intorno dello 0, derivata del denominatore non nulla in un intorno dello 0, 0 escluso):

Il limite del rapporto delle derivate è:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{(cos(x)-1)(cos(x)+1)}{ax^{a-1}(cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen^2(x)}{ax^{a-1}(cos(x)+1)} = \frac{-1}{2a}\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^{a-1}}$$

Questo limite è finito se $2 = a-1,\ da\ cui\ a = 3$ ed il limite vale $-\frac{1}{2a} = -\frac{1}{6}$.

QUESITO 7

Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \frac{x+2\sqrt{2}}{x^2-8}$$

è continua nell'intervallo $[-3,-1]$ *e se, nello stesso intervallo, è dotata di minimo e massimo assoluto.*

La funzione è continua per ogni x esclusi i valori che annullano il denominatore: $x = \pm\sqrt{8} \cong \pm 2.8$; quindi nell'intervallo $[-3,-1]$, che contiene $-\sqrt{8}$, non è continua.

In particolare, essendo:

$$\lim_{x\to-\sqrt{8}} \frac{x+2\sqrt{2}}{x^2-8} = \lim_{x\to-\sqrt{8}} \frac{x+2\sqrt{2}}{(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})} = \lim_{x\to-\sqrt{8}} \frac{1}{(x-2\sqrt{2})} = \frac{1}{-4\sqrt{2}} \cong -0.177$$

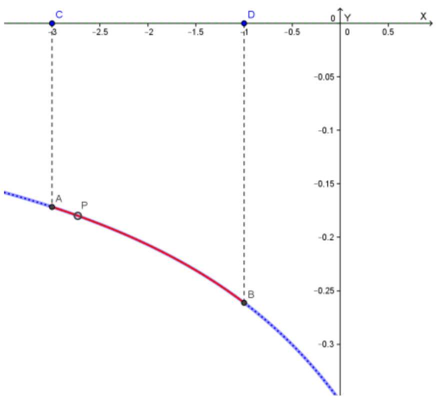
$x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ è una discontinuità di terza specie (eliminabile).

Nell'intervallo $[-3, -1]$ abbiamo: $f(-3) = \frac{1}{(-3-2\sqrt{2})} \cong -0.172, \quad f(-1) = \frac{1}{(-1-2\sqrt{2})} \cong -0.26$
Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2\sqrt{2})^2} < 0 \ \ per\ ogni\ x \neq 2\sqrt{2},$$

Pertanto nell'intervallo dato la funzione è sempre decrescente, pertanto $f(-3) = \frac{1}{(-3-2\sqrt{2})}$ è il massimo assoluto ed $f(-1) = \frac{1}{(-1-2\sqrt{2})}$ è il minimo assoluto.

Osserviamo che il grafico della funzione è un'iperbole privata di un punto (P). Grafico:



QUESITO 8

Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

La probabilità che esca un numero diverso da 3 è $\frac{p}{2}$; deve essere: $p + 11\left(\frac{p}{2}\right) = 1,$
$quindi{:}\ 13p = 2,\ \ p = \frac{2}{13} \cong 15.4\ \%$ (la probabilità che esca un numero diverso da 3 è $\frac{1}{13}$).

Calcoliamo la probabilità che in 5 lanci il 3 esca almeno 2 volte. Si tratta di una distribuzione binomiale con $n = 5\ , p = \frac{2}{13}\ \ e\ q = 1 - p = 11/13$. Quindi:

$p(esce\ il\ 3\ almeno\ 2\ volte) = 1 - [p(esce\ il\ 3\ zero\ volte) + p(esce\ il\ 3\ una\ volta)] =$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0} p^0 q^5 + \binom{5}{1} p^1 q^4\right] = 1 - \left[\left(\frac{11}{13}\right)^5 + 5\left(\frac{2}{13}\right)\left(\frac{11}{13}\right)^4\right] = 1 - \left(\frac{11}{13}\right)^4 \left[\frac{11}{13} + \frac{10}{13}\right] =$$

$$= 1 - 21 \cdot \frac{11^4}{13^5} = \frac{63832}{371293} \cong 0.172 = 17.2\ \% = p(esce\ il\ 3\ almeno\ 2\ volte)$$

QUESITO 9

Dimostrare che l'equazione: $arctg(x) + x^3 + e^x = 0$ *ha una e una sola soluzione reale.*

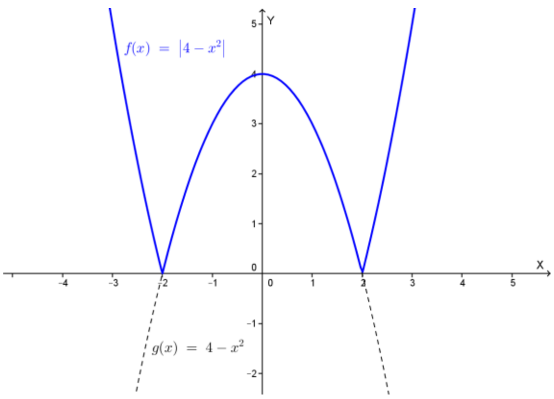
La funzione $f(x) = arctg(x) + x^3 + e^x$ è continua su tutto R ed ha i seguenti limiti alla frontiera: se $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$, $se\ x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$: quindi la funzione ammette almeno uno zero, Studiamo la derivata prima:

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x > 0\ per\ ogni\ x$: la funzione è quindi sempre crescente perciò il suo grafico taglia l'asse delle x solo una volta; pertanto l'equazione data ammette una sola soluzione reale.

QUESITO 10

Data la funzione: $f(x) = |4 - x^2|$ *verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo* $[-3;\ 3]$ *e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo* $[-3;\ 3]$ *in cui la derivata prima di* $f(x)$ *si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.*

Si verifica facilmente che la funzione non è derivabile in tutto l'intervallo aperto (-3; 3), non essendo derivabile in x=-2 e x=2, come si può verificare facilmente dal grafico della funzione (che si ottiene facilmente dalla parabola di equazione $y = 4 - x^2$ confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte rimanente). La derivata della funzione si annulla per x=0 (punto a tangente orizzontale del grafico), ma ciò non contraddice il teorema di Rolle, che fornisce delle condizioni sufficienti per avere almeno un punto in cui si annulla la derivata prima, ma non necessarie; cioè, anche se non sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle può esistere qualche punto in cui la derivata si annulla.



Con la collaborazione di Angela Santamaria