



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LIA2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

LII2 - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO INGLESE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x - 2}{x^2 - \lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy .

1. Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5} Γ_0 Γ_3 Γ_4 Γ_9 .
2. Stabilisci, al variare di λ in \mathbb{R} , se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ , qual è l'andamento della funzione g_λ , tracciandone un diagramma indicativo.
3. Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.
4. Detti A e B i punti di intersezione tra Γ_9 e gli assi cartesiani, sia \mathcal{G} la regione piana delimitata dai segmenti OA e OB e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B . Determina l'area di \mathcal{G} e il volume del solido generato dalla rotazione di \mathcal{G} attorno all'asse y .

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

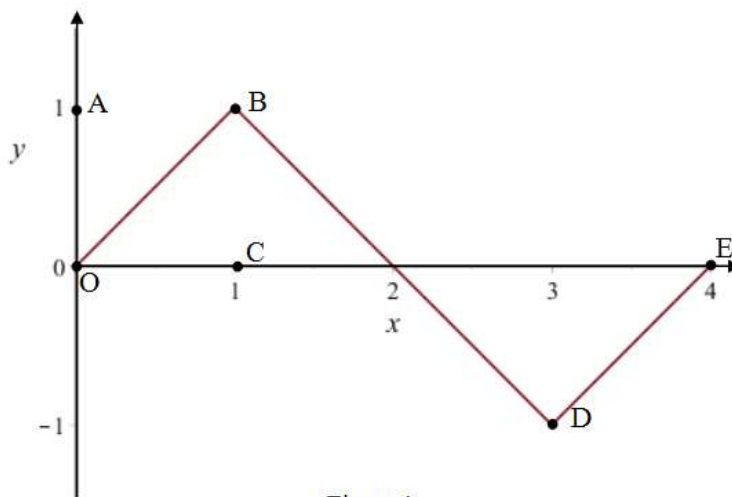


Figura 1



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0, 0)$, $B(1, 1)$, $D(3, -1)$, $E(4, 0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = \text{sen}(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

QUESTIONARIO

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b .

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

nel punto di ascissa $x_0 = \pi$.

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \frac{x + 2\sqrt{2}}{x^2 - 8}$$

è continua nell'intervallo $[-3, -1]$ e se, nello stesso intervallo, è dotata di minimo e massimo assoluto.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\arctg(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

COPIA CONFORME AGLI ATTI MIUR

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.