LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2017 - PROBLEMA 1

L'azienda per cui lavori vuole aprire in città una pista di pattinaggio su ghiaccio e ti ha dato l'incarico di occuparti del progetto.
La pista verrà realizzata su un terreno di forma rettangolare, di base 40 metri e altezza 20 metri, e secondo le specifiche che ti sono state fornite sarà di forma ellittica [1] *e avrà area pari a* $600\ m^2$*. Stabilito un sistema di assi cartesiani* Oxy*, il cui centro coincide con il centro dell'ellisse e con quello del rettangolo, in figura 1 sono rappresentati il terreno e la pista, in figura 2 la regione relativa al primo quadrante. La superficie in grigio è da adibire a deposito e a servizi tecnici, per cui deve essere inaccessibile al pubblico: essa è delimitata dalle tangenti alla pista passanti per i punti medi dei lati verticali* AB *e* CD*.*

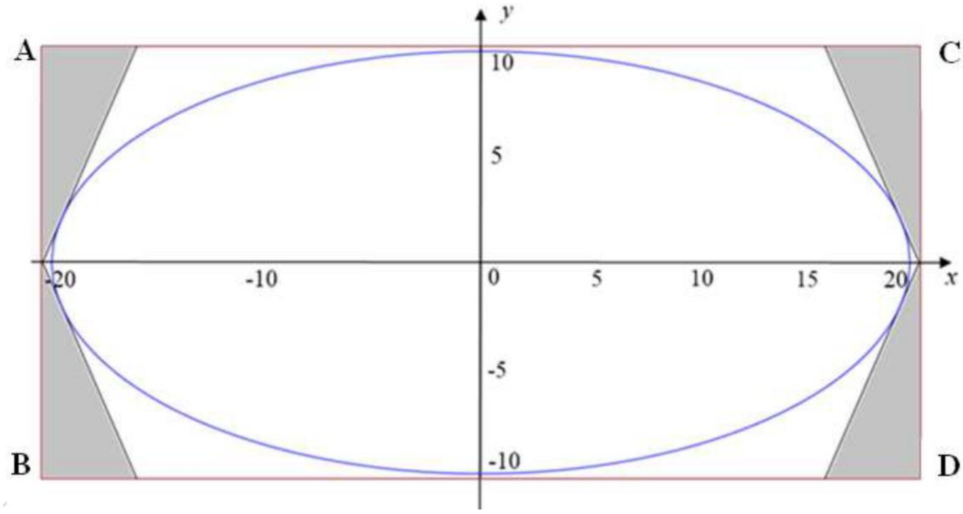

figura 1

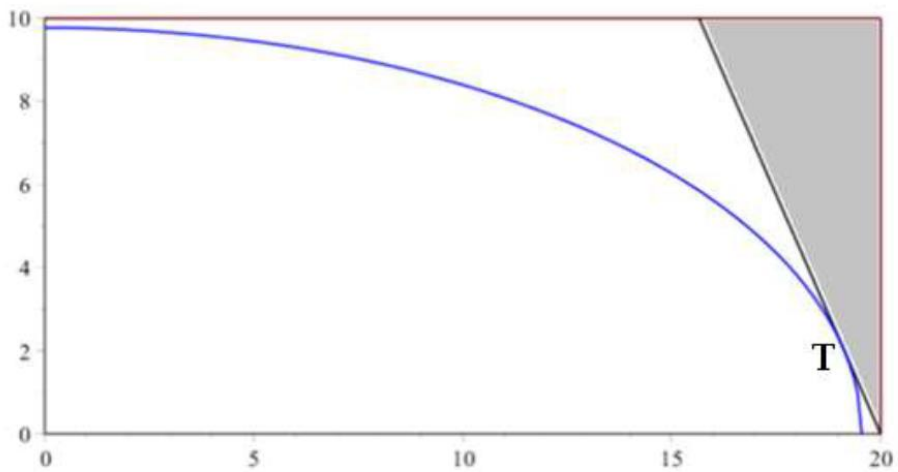

figura 2

[1] L'equazione dell'ellisse, in coordinate cartesiane, è la seguente: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1)

Determina, in funzione di a e b (rispettivamente lunghezza del semiasse orizzontale e del semiasse verticale dell'ellisse) le coordinate del punto di tangenza T, e verifica che l'espressione della superficie totale S dell'area evidenziata in grigio nella figura 2 è:

$$S = \frac{50\sqrt{400-a^2}}{b}$$

La tangente in T è una delle due tangenti all'ellisse uscenti dal punto di coordinate $(20; 0)$. Le due tangenti hanno equazioni del tipo: $y = m(x-20)$; intersechiamo con l'ellisse (che per comodità scriviamo nella forma $ux^2 + vy^2 = 1$) ed imponiamo al delta dell'equazione risolvente di essere nullo:

$$\begin{cases} y = m(x-20) \\ ux^2 + vy^2 = 1 \end{cases};\quad ux^2 + vm^2(x-20)^2 = 1,\quad (u+vm^2)x^2 - 40vm^2x + 400vm^2 - 1 = 0\,,$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0:\quad 400v^2m^4 - (u+vm^2)(400vm^2-1) = 0;\quad (v-400uv)m^2 + u = 0\,,$$

$$m^2 = \frac{u}{400uv - v} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}\left(\frac{400}{a^2}-1\right)} = \frac{b^2}{400-a^2}\quad ,\quad m = \pm\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}$$

$(con\ \ 0 < b < 10\ \ e\ \ 0 < a < 20)$

La tangente in T (che ha coefficiente angolare negativo) ha quindi equazione:

$y = \frac{-b}{\sqrt{400-a^2}}(x-20)\qquad (1)$

Le coordinate di T si ottengono intersecando questa tangente con l'ellisse, e possiamo trovarle sostituendo il valore di m^2 trovato nella:

$(u+vm^2)x^2 - 40vm^2x + 400vm^2 - 1 = 0$

che, avendo il delta nullo, ha: $x = \frac{20vm^2}{u+vm^2} = \frac{20v\cdot\frac{u}{400uv-v}}{u+v\cdot\frac{u}{400uv-v}} = \frac{1}{20u} = \frac{a^2}{20} = x_T$

L'ordinata di T si ottiene sostituendo questo valore nella (1):

$$y = \frac{-b}{\sqrt{400-a^2}}(x-20) = \frac{-b}{\sqrt{400-a^2}}\left(\frac{a^2}{20}-20\right) = \frac{b(400-a^2)}{20\sqrt{400-a^2}} = \frac{b}{20}\sqrt{400-a^2} = y_T$$

Si ha infine: $T = \left(\frac{a^2}{20};\ \frac{b}{20}\sqrt{400-a^2}\right)$.

Per trovare l'area di S intersechiamo la tangente in T con la rette di equazione y=10:

$$\begin{cases} y = 10 \\ y = \dfrac{-b}{\sqrt{400-a^2}}(x-20) \end{cases} \quad ; \quad 10 = \frac{-b}{\sqrt{400-a^2}}(x-20) \ ; \quad 10\sqrt{400-a^2} = -bx + 20b \quad ;$$

$$x = \frac{20b - 10\sqrt{400-a^2}}{b}$$

Si ha quindi:

$$S = \frac{1}{2}(10)\left[20 - \frac{20b - 10\sqrt{400-a^2}}{b}\right] = 5\left(\frac{10\sqrt{400-a^2}}{b}\right) = \frac{50\sqrt{400-a^2}}{b} = S$$

2)

Per motivi estetici, è richiesto che la proporzione tra il semiasse orizzontale e quello verticale dell'ellisse sia uguale a quella tra il lato orizzontale e quello verticale del rettangolo. Ricordando che l'area della pista[2] deve essere pari a $600\ m^2$, determina i valori di a e b (approssimati al centimetro). Verifica inoltre che la superficie evidenziata in grigio occupi meno del 15% del terreno disponibile.

Deve essere: $\frac{a}{b} = \frac{40}{20} = 2, \quad a = 2b$. Ma è anche: $\pi ab = 600$ da cui: $\pi \cdot 2b^2 = 600,$

$$b = \sqrt{\frac{300}{\pi}}\, m \cong 9.77\ m \quad e \quad a = 2\sqrt{\frac{300}{\pi}}\ m \cong 19.54\ m$$

Per tali valori di a e b la superficie S risulta:

$$S = \frac{50\sqrt{400-a^2}}{b} = \frac{50\sqrt{400 - \frac{1200}{\pi}}}{\sqrt{\frac{300}{\pi}}} \cong 21.72\ m^2$$

Quindi, essendo la superficie evidenziata in grigio il quadruplo di S, si ha:

$$\frac{S_{tot}}{Area(stabile)} \cong \frac{21.72\ \cdot 4\ \ m^2}{40 \cdot 20\ m^2} \cong 0.109 = 10.9\ \% < 15\ \%$$

[2] L'area della superficie racchiusa dall'ellisse di semiassi *a* e *b* è pari a πab.

Un'altra problematica da affrontare riguarda la scelta di un macchinario per la produzione del ghiaccio necessario per la pista, tenendo presenti la dimensione della pista, il tempo impiegato per tale produzione e il relativo consumo di energia. Tramite una ricerca di mercato, hai individuato un dispositivo che riesce a lavorare a una velocità che è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto e in 3 ore di lavoro, a temperatura ambiente standard, produce una lastra di ghiaccio di superficie di $600\ m^2$ avente uno spessore di $3\ cm$.

3)

Individua, per il macchinario selezionato, il modello matematico che descrive l'andamento dello spessore dello strato di ghiaccio in funzione del tempo.

Indicata con v la velocità di variazione dello spessore del ghiaccio prodotto e con s lo spessore della lastra di ghiaccio prodotta, risulta: $v = \frac{k}{s}$ $(con\ k\ costante\ positiva)$.

Da $v = \frac{k}{s}$ otteniamo, essendo $v = \frac{ds}{dt}$, $\frac{ds}{dt} = \frac{k}{s}$, $s\ ds = k\ dt$.

Integrando:

$\int_0^s s\ ds = \int_0^t k\ dt$, $\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^s = [kt]_0^t$, $\frac{1}{2}s^2 = kt$, $s^2 = 2kt$, $s = \sqrt{2kt}$ $(s\ \ in\ \ cm\ \ e\ t\ in\ ore)$

e siccome per $t = 3\ h$ si ha $s = 3\ cm$ abbiamo:

$3\ cm = \sqrt{2k \cdot (3\ h)}$, $9\ cm^2 = (6k)\ h$, $k = \frac{3}{2}\ (cm^2/h\ )$, $quindi\ la\ legge\ richiesta$ è:

$s = \sqrt{3t}$, $con\ s\ espresso\ in\ cm\ e\ t\ in\ ore.$

Per un utilizzo ottimale la pista deve avere uno spessore compreso tra i 6,5 e gli 8 cm.

4)

Determina il tempo che il macchinario impiega a realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7,5 cm.

$7.5\ cm = \sqrt{3t\ cm^2/h}$, $7{,}5^2\ cm^2 = 3t\frac{cm^2}{h}$, $t = \frac{56.25}{3}\ h = 18.75\ h$

Con la collaborazione di Stefano Scoleri e Angela Santamaria