LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2017 - PROBLEMA 2

Le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 sono definite nel modo seguente:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$g_2(x) = |x| - 1$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g_4(x) = ln(|x|)$$

1)

Verifica che nei punti $x = 1$ e $x = -1$ le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 condividono le stesse rette tangenti.

Calcoliamo le derivate delle funzioni:

$g_1'(x) = x,\quad g_2'(x) = 1\ \ se\ x > 0\,, g_2'(x) = -1\ \ se\ x < 0\ \ ,\quad g_3'(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right),\qquad g_4'(x) = \frac{1}{x}$

Cerchiamo i valori che tali derivate assumono in x=1 e x=-1, che equivalgono ai coefficienti angolari delle rette tangenti:

$g_1'(1) = 1,\quad g_2'(1) = 1\,,\quad g_3'(1) = 1,\qquad g_4'(1) = 1$

$g_1'(-1) = -1,\quad g_2'(-1) = -1\,,\quad g_3'(-1) = -1,\qquad g_4'(-1) = -1$

Calcoliamo i valori che assumono le funzioni in x=1 e x=-1:

$g_1(1) = 0,\qquad g_2(1) = 0,\qquad g_3(1) = 0,\qquad g_4(1) = 0$

$g_1(-1) = 0,\qquad g_2(-1) = 0,\qquad g_3(-1) = 0,\qquad g_4(-1) = 0$

Le tangenti in (1; 0) hanno coefficiente angolare 1, quindi equazione: $y = x - 1$

Le tangenti in (-1; 0) hanno coefficiente angolare -1, quindi equazione: $y = -x - 1$

2)

Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 *deduci quelli delle funzioni:*

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se\ |x| \geq 1 \\ -g_1(x) \ , & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se\ |x| \geq 1 \\ -g_2(x) \ , & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se\ |x| \geq 1 \\ -g_3(x) \ , & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

classifica gli eventuali punti di non derivabilità di f_1, f_2, f_3 *e posto*

$$I_1 = \int_{-e}^{e} f_1(x)dx$$

$$I_2 = \int_{-e}^{e} f_2(x)dx$$

$$I_3 = \int_{-e}^{e} f_3(x)dx$$

verifica le disuguaglianze: $I_1 < I_3 < I_2$*.*

Rappresentiamo graficamente le funzioni

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ , g_2(x) = |x| - 1 \ , g_3(x) = -\frac{2}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ , g_4(x) = ln(|x|)$$

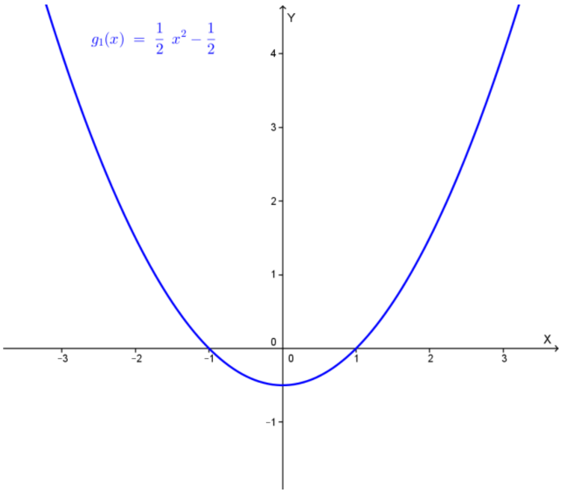
La prima è una parabola con vertice in $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, asse di simmetria l'asse y e concavità verso l'alto.

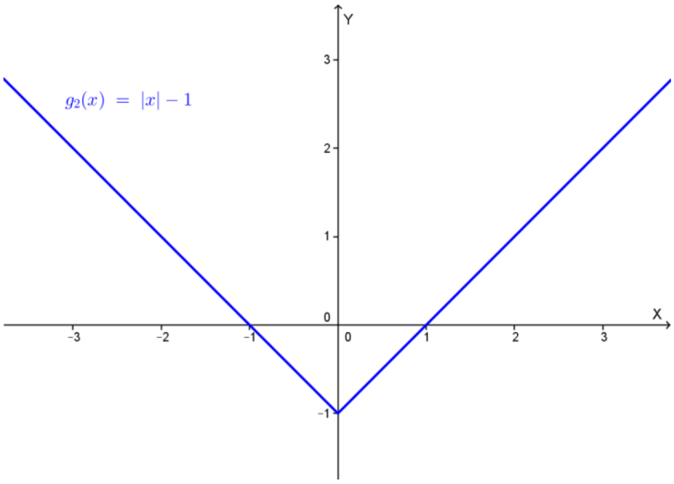
La seconda si ottiene da $y = |x|$ traslando verso il basso di 1.

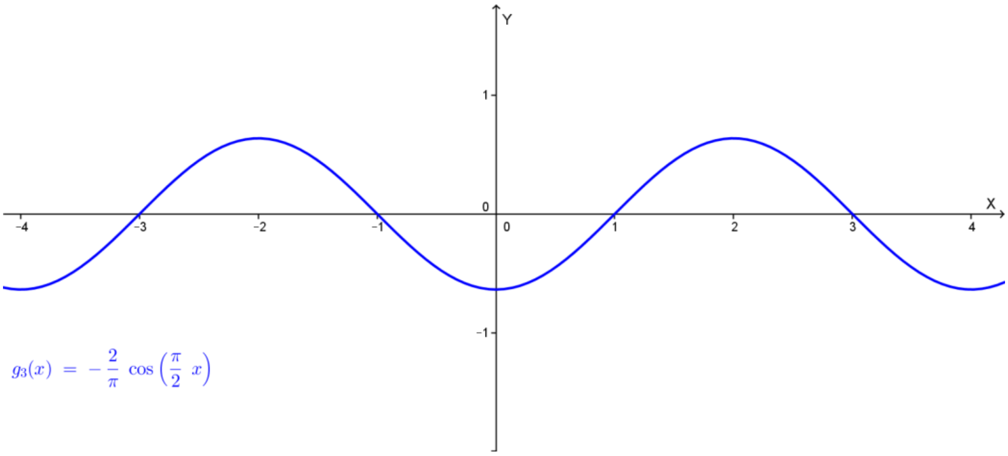
La terza è una funzione coseno con periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ e situata tra $-\frac{2}{\pi}$ e $\frac{2}{\pi}$.

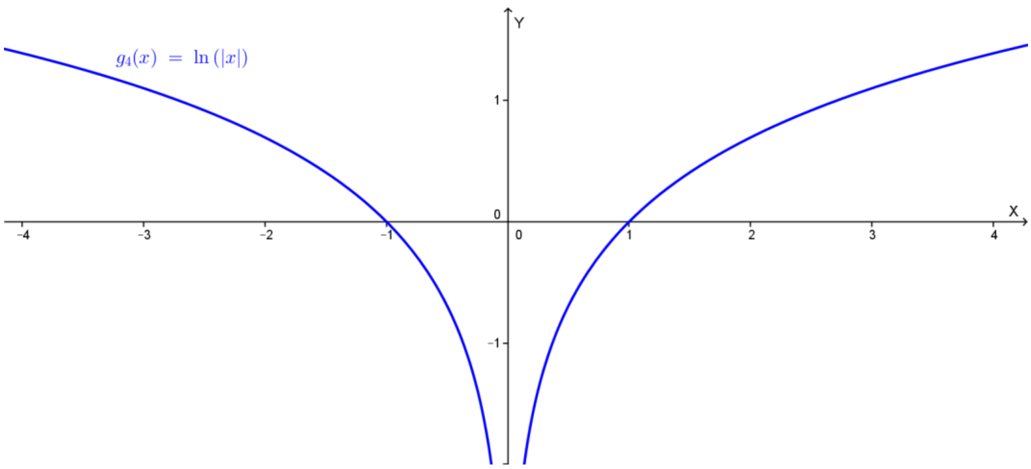
La quarta si ottiene da $\ln(x)$ con l'aggiunta della sua simmetrica rispetto all'asse y.

I quattro grafici sono indicati nelle figure seguenti:



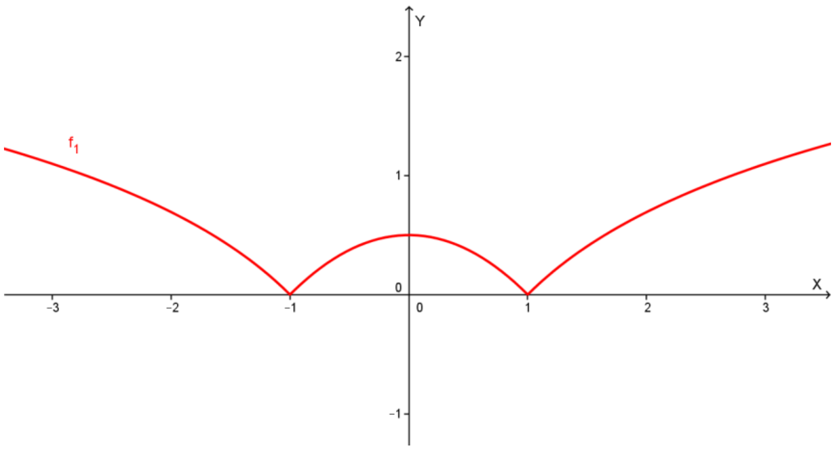




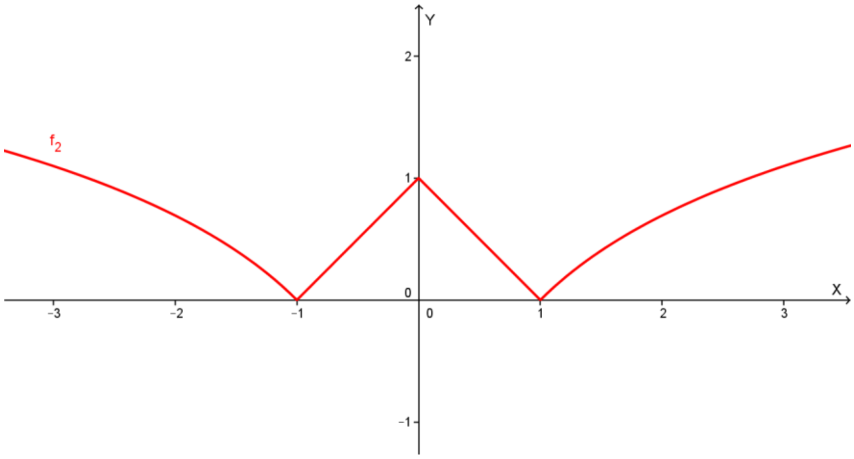


Rappresentiamo ora le tre funzioni f_1, f_2, f_3.

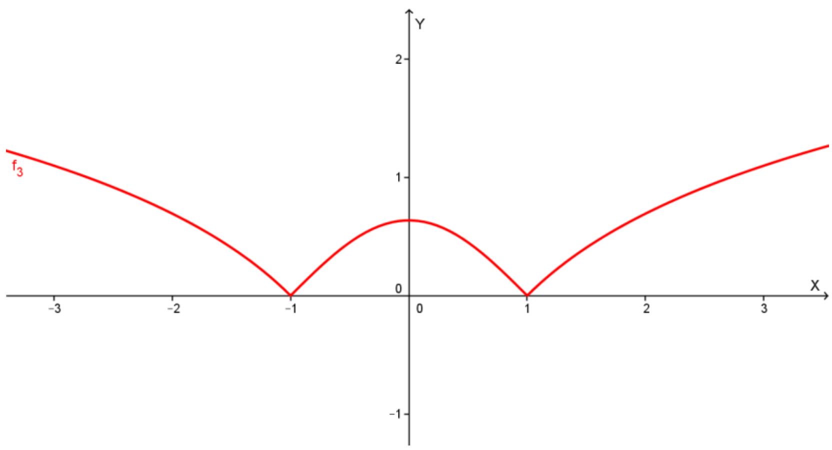
$$f_1(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se \ |x| \geq 1 \\ -g_1(x) \ , & se \ |x| < 1 \end{cases}$$



$$f_2(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se \ |x| \geq 1 \\ -g_2(x) \ , & se \ |x| < 1 \end{cases}$$



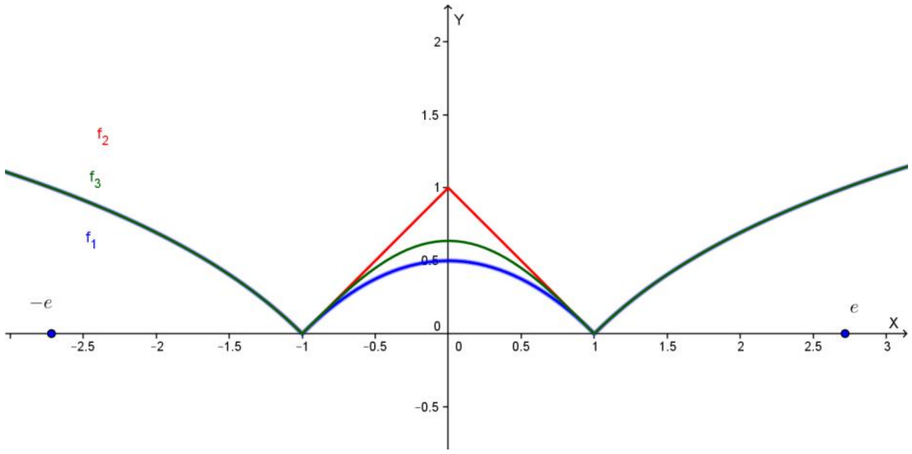
$$f_3(x) = \begin{cases} \ln|x| \ , & se \ |x| \geq 1 \\ -g_3(x) \ , & se \ |x| < 1 \end{cases}$$



Le tre funzioni hanno in x=-1 e x=1 dei punti angolosi; inoltre la funzione f_2 ha un altro punto angoloso in x=0.

Posto $I_1 = \int_{-e}^{e} f_1(x)dx$, $I_2 = \int_{-e}^{e} f_2(x)dx$, $I_3 = \int_{-e}^{e} f_3(x)dx$

verifichiamo le disuguaglianze: $I_1 < I_3 < I_2$.



La dimostrazione della proprietà richiesta segue dal fatto che per |x|>1 le tre funzioni coincidono e nell'intervallo [-1; 1] risulta:

$$f_1 < f_3 < f_2$$

3)

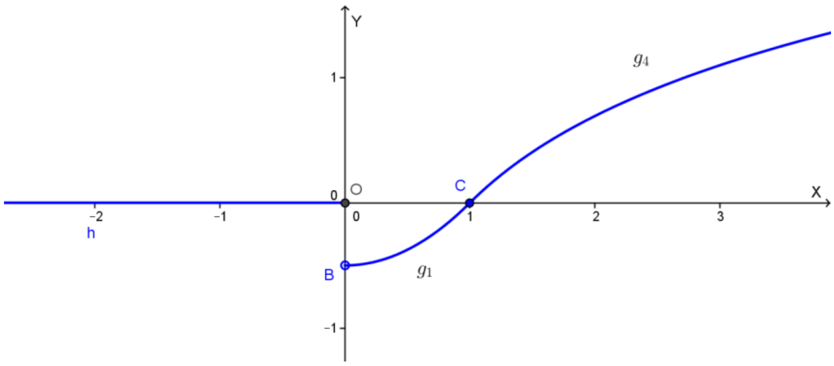
Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0\,, & se\ x \leq 0 \\ g_1(x)\,, & se\ 0 < x < 1 \\ ln(|x|)\ , & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

dimostra che la funzione:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

ammette uno zero nell'intervallo $[\sqrt{e}; e]$.



Lo zero richiesto è il punto a>1 tale che:

$$\int_1^a ln(x)\,dx = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = -\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3}$$

Determiniamo per parti una primitiva di $ln(x)$:

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = xln(x) - x + C$$

Quindi:

$$\int_1^a ln(x)\,dx = [xln(x) - x]_1^a = alna - a + 1 = \frac{1}{3}\,, \qquad \ln a = \frac{a - \frac{2}{3}}{a}$$

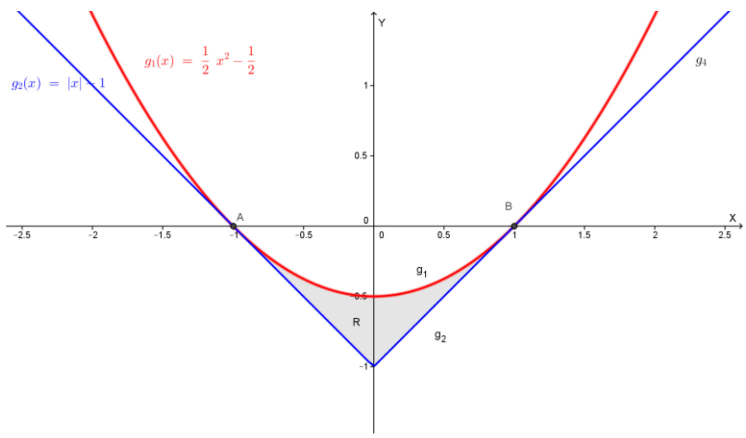
Con $a = \sqrt{e}\ \ si\ ha$: $\ln a = \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{a-\frac{2}{3}}{a} = \frac{\sqrt{e}-\frac{2}{3}}{\sqrt{e}} \cong 0.6 > \frac{1}{2}$

Con $a = e\ \ si\ ha$: $\ln a = \ln e = 1 \quad e \quad \frac{a-\frac{2}{3}}{a} = \frac{e-\frac{2}{3}}{e} \cong 0.8 < 1$

Quindi $\sqrt{e} < a < e$

4)

Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di $\frac{\pi}{3}$ radianti intorno all'asse x la regione di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = -1$, $x = +1$ e dai grafici di $g_2\ e\ g_1$.



Ricordiamo che il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 2π della regione di piano compresa fra il grafico di una funzione f(x) e le rette x=a e x=b intorno all'asse x è dato da:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Se la rotazione è di α radianti il volume V' si ottiene a partire dalla seguente proporzione:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\alpha}{2\pi} \;,\; quindi: \;\; V' = \frac{\alpha}{2\pi} V = \frac{\alpha}{2} V = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x)dx$$

Se la rotazione è quella della regione compresa fra i grafici delle due funzioni f(x) e g(x), supponendo f e g positive e f(x)>g(x) si ha:

$$V = \frac{\alpha}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

Nel nostro caso

$$V = 2\left[\frac{\frac{\pi}{3}}{2} \int_0^1 \left(g_2^2(x) - g_1^2(x)\right) dx\right] = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left[(x-1)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right) dx = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{15} = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria