LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2017 QUESTIONARIO

QUESITO 1

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

Ricordiamo che la definizione di derivata è la seguente:
esiste finito il limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nel nostro caso:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x} = f'(x)$$

(Abbiamo applicato il limite notevole $\lim_{f(x)\to 0}\frac{ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$).

QUESITO 2

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & per\ x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & per\ x \geq 2 \end{cases}$$

Determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

La funzione è continua per ogni x diverso da 2 (funzione polinomiale); analizziamo la continuità in x=2:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(kx^2 - 2x + 1) = 4k - 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2 + (k-1)x - 1) = 2k + 1 = f(2)$$

Per essere continua in x=2 deve essere: $4k - 3 = 2k + 1,\quad k = 2$

La funzione è quindi continua in tutto l'insieme di definizione se $k = 2$.

La funzione (polinomiale) è derivabile con continuità per ogni x diverso da 2; è derivabile (con derivata continua) in x=2 se

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = finito$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2kx - 2) = 4k - 2 = f'_-(2)$$

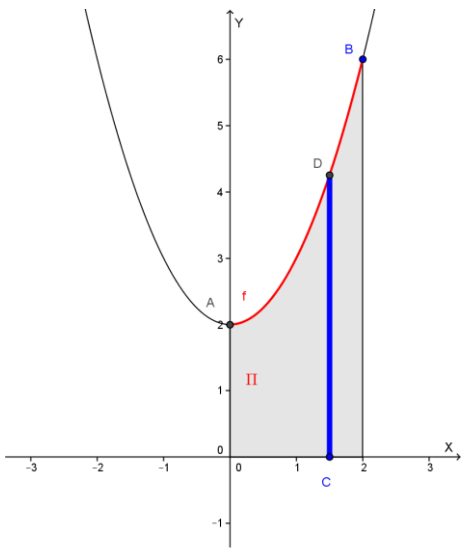
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x + k - 1) = k + 3 = f'_+(2)$$

Dovrà essere: $4k - 2 = k + 3$, $k = \frac{5}{3}$.

Quindi non esistono valori di k tali che la funzione sia continua e derivabile con derivata continua in tutto il suo insieme di definizione.

QUESITO 3

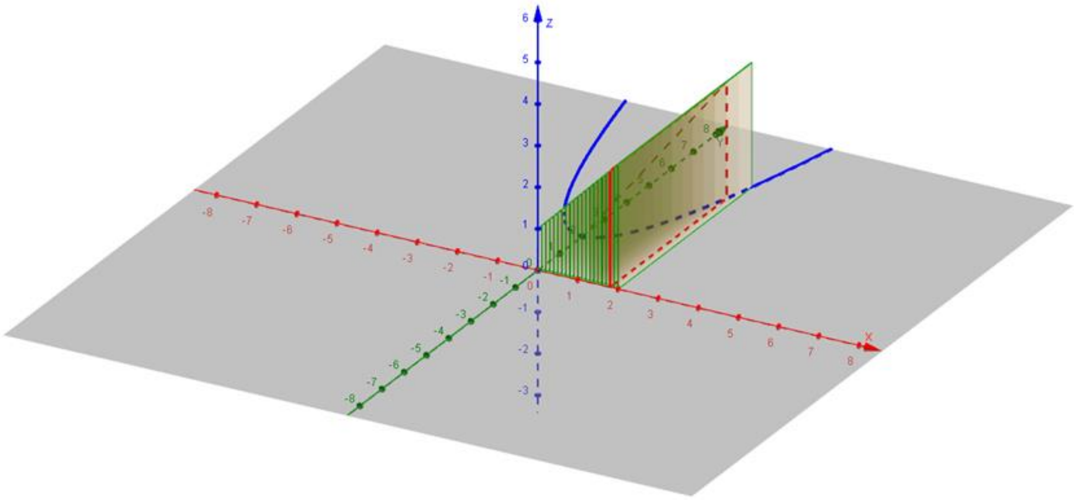
Un solido ha per base la regione Π del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2$ e l'asse delle x nell'intervallo [0; 2]. Per ogni punto P di Π, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $x + 1$. Calcolare il volume del solido.

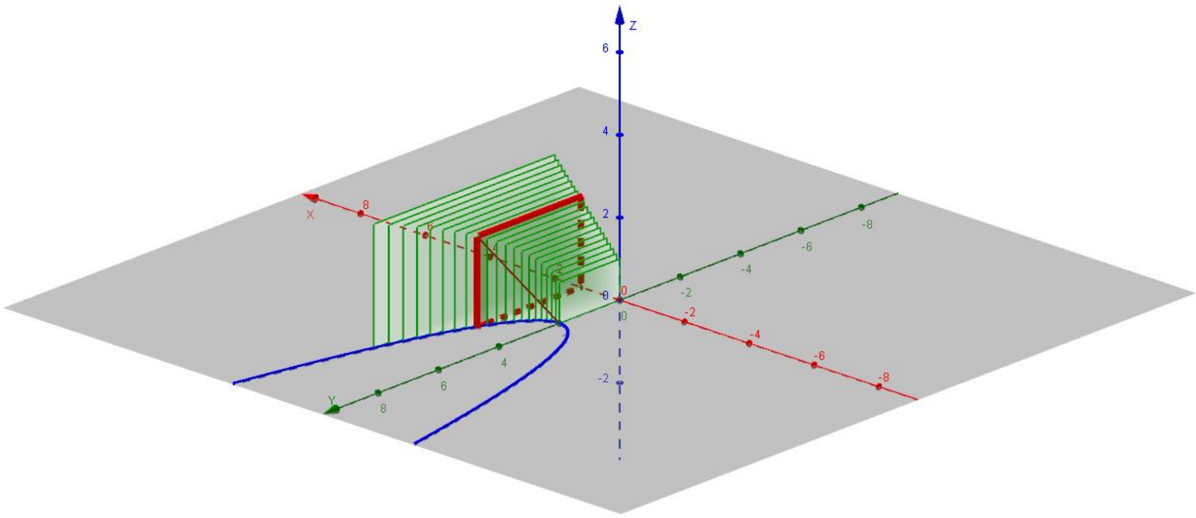


Detta $A(x) = f(x) \cdot (x + 1) = (x^2 + 2)(x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ l'area della sezione, il volume richiesto è dato da:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^2 (x^3 + x^2 + 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right]_0^2 =$$

$$= 4 + \frac{8}{3} + 4 + 4 = \frac{44}{3}\ u^3 \cong 14.667\ u^3$$





QUESITO 4

Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito: a) 4 volte; b) le prime 4 volte.

a) Essendo $p = 0.28$ e $q = 1 - p = 0.72$, trattandosi di una distribuzione binomiale (con n=10 prove ripetute) si ha:

$$p(n,x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{10}{4} 0.28^4 \cdot 0.72^6 = 210 \cdot 0.28^4 \cdot 0.72^6 = 0.1798 \cong 18.0\ \%$$

b) In questo caso (intendendo che si faccia centro SOLO le prime 4 volte) si ha:

$$p(centro\ le\ prime\ 4\ volte) = 0.28^4 \cdot 0.72^6 \cong 0.000856 \cong 0.09\ \%$$

QUESITO 5

Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$$

ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k?

Calcoliamo la derivata prima della funzione e uguagliamola a 1:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + k = 1, \quad 3x^2 + 4x + k - 1 = 0$$

Per avere una sola soluzione il delta di questa equazione deve essere nullo:

$$4 - 3k + 3 = 0\,, \quad k = \frac{7}{3}$$

Con tale valore di k la funzione ha equazione:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{7}{3}x - 4$$

E risulta $f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{7}{3} = 0 \quad se \quad 9x^2 + 12x + 7 = 0 \; (tangente\ orizzontale)$;
Tale equazione è impossibile (delta negativo), quindi non ci sono punti a tangente orizzontale.

QUESITO 6

In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3;\ 3;\ 0)$. Determinare il raggio della sfera.

Il raggio della sfera non è altro che la distanza del suo centro dal piano tangente, quindi, applicando la formula della distanza punto-piano:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|9 - 12 - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 = raggio\ sfera\ tangente$$

QUESITO 7

Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x) - [\ln(x)]^2$$

dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x > 1$, che passano entrambe per il punto $P(0;\ 1)$ e scrivere le rispettive equazioni.

La generica retta per P ha equazione: $y-1=mx,\ \ y=mx+1$. Tale retta è tangente alla curva nei punti di ascissa x tali che:

$$\begin{cases} f'(x)=m \\ f(x)=mx+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\ln(x)=m \\ \ln(x)-[\ln(x)]^2=mx+1 \end{cases}$$

$$\ln(x)-[\ln(x)]^2=x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\ln(x)\right)+1\ , \quad \ln(x)-[\ln(x)]^2=2-2\ln(\mathrm{x}),$$

$$[\ln(x)]^2-3\ln(x)+2=0, \quad da\ cui:\ \ln(x)=1 \quad ed \quad \ln(x)=2, \quad quindi:$$

$x=e \quad ed\ x=e^2$, che sono appunto due punti di ascissa x>1.

QUESITO 8

Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto P *di coordinate* $(1;\ 1;\ 0)$ *al piano di equazione* $2x-2y+z=0$.

La retta richiesta passa per P ed ha parametri direttori uguali ai coefficienti di x, y e z dell'equazione del piano (parametri direttori di una normale al piano): a=2, b=-2, c=1.

La retta in forma parametrica è quindi:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$$

In forma generale la retta ha equazioni:

$$\begin{cases} x=1+2z \\ y=1-2z \end{cases}$$

QUESITO 9

Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca "testa" in un lancio è pari a p*, determina i possibili valori che può assumere* p*, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è* $8/27$.

Si tratta di una distribuzione binomiale con numero di prove n=4, numero di "successi" x=2 e probabilità del successo p. Quindi deve essere:

$p(n,x)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x}=\binom{4}{2}p^2\cdot(1-p)^2=\frac{8}{27}$ da cui:

$$6p^2(1-p)^2=\frac{8}{27}, \quad \left(p(p-1)\right)^2=\frac{4}{81}, \quad quindi:\ p(p-1)=\pm\frac{2}{9}$$

Risolviamo le due equazioni (ricordiamo che $0 \leq p \leq 1$) :

$$p(p-1)=\frac{2}{9}, \qquad 9p^2-9p-2=0:$$

$$p=-\frac{\sqrt{17}}{6}+\frac{1}{2} \cong -0.19 \; non\ accettabile \quad e\ p=\frac{\sqrt{17}}{6}+\frac{1}{2} \cong 1.2 \; non\ accettabile$$

$$p(p-1)=-\frac{2}{9}, \quad 9p^2-9p+2=0: \; p=\frac{1}{3}\ \ e\ p=\frac{2}{3}\ :\ accettabili.$$

QUESITO 10

Data la funzione integrale:

$$\int_0^{e^{2x}} \ln(t)\, dt$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

Ricordiamo che la derivata della funzione integrale

$$F(x)=\int_0^{g(x)} f(t)dt \quad \text{è} \quad F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

Nel nostro caso, posto

$$F(x)=\int_0^{e^{2x}} \ln(t)\, dt$$

si ha:

$$F'(x)=(\ln(e^{2x}))\cdot 2e^{2x}=2x\cdot 2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}=4xe^{2x}$$

I punti stazionari di questa funzione sono quelli che annullano la sua derivata prima, quindi:

$$D(4xe^{2x})=0, \quad 4e^{2x}+4x(2e^{2x})=4e^{2x}(1+2x)=0 \; se \; x=-\frac{1}{2}$$

La derivata della funzione

$$F(x)=\int_0^{e^{2x}} \ln(t)\, dt$$

ha un punto stazionario per $x=-\frac{1}{2}$ $\left(con\ y=-\frac{2}{e}\right)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria