SESSIONE SUPPLETIVA 2017 - QUESTIONARIO

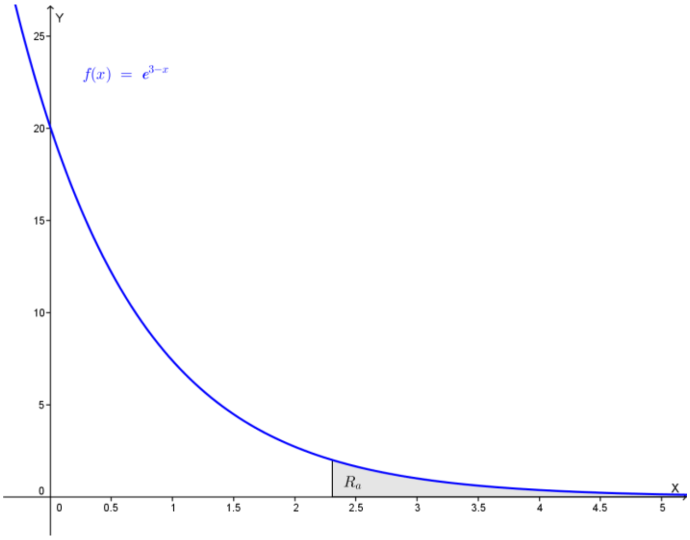
QUESITO 1

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{3-x}$. Preso un numero reale a, sia R_a la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa $x > a$ che sono compresi tra il grafico di f e l'asse x. Per quale valore di a l'area di R_a risulta pari a 2?

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_a^{+\infty} e^{3-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{3-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[-e^{3-x}]_a^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{3-b}+e^{3-a}) = e^{3-a} = 2 \quad se:$$

$$3 - a = \ln(2)\,, \quad a = 3 - \ln(2)$$



QUESITO 2

Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto $(1,0,3)$ al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.

Una terna di parametri direttori della retta è formata dai coefficienti di x, y e z dell'equazione del piano: 3, 2, -1. La retta in forma parametrica è la seguente:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

La retta può essere scritta anche nella forma:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

QUESITO 3

Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo $[0;\ 2]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data da $p(x) = k \cdot x^2(2-x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata.

Affinché p(x) sia una densità di probabilità deve essere:

$$\int_0^2 p(x)dx = 1$$

Quindi:

$$\int_0^2 k \cdot x^2(2-x)dx = k\int_0^2 (2x^2-x^3)dx = k\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = k\left(\frac{16}{3}-4\right)=\frac{4}{3}k=1:\ k=\frac{3}{4}$$

Pertanto:

$$p(x)=\frac{3}{4}\,x^2(2-x)$$

Il valor medio è dato da:

$$M=\int_0^2 x\cdot p(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\left[\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{20}x^5\right]_0^2=6-\frac{24}{5}=\frac{6}{5}=M$$

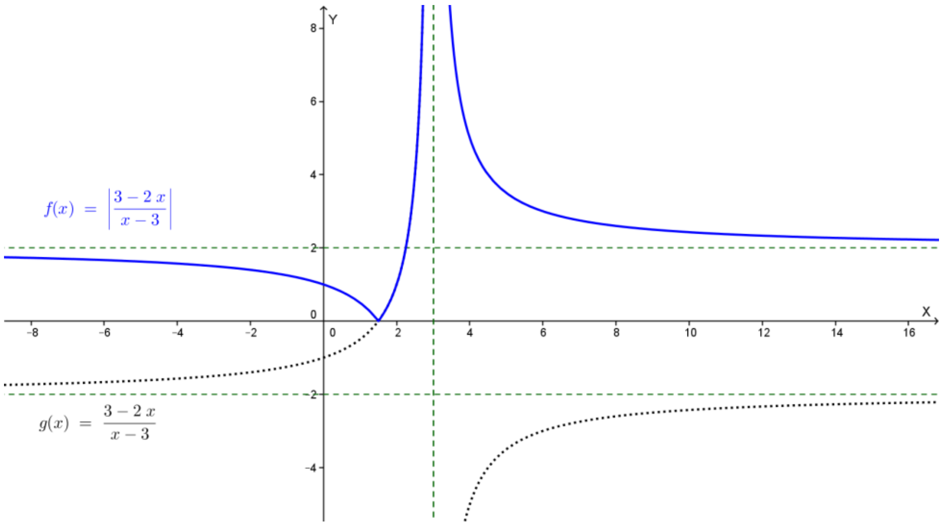
QUESITO 4

Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x)=\left|\frac{3-2x}{x-3}\right|$$

Verificare se negli intervalli [0; 2] e [4; 6] valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a;\ b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

Il grafico di f si ottiene da quello di $g(x)=\frac{3-2x}{x-3}$ confermando la parte ≥ 0 e ribaltando la parte negativa rispetto all'asse x. La g è una funzione omografica di centro $C=(3;\ -2)$ asintoti $x=3\ \ e\ \ y=-2$, passante per $(0;\ -1)\ e\ \left(\frac{3}{2};0\right)$. I grafici di g ed f sono i seguenti:



La f è continua su tutto R, 3 escluso ed è derivabile in tutti i punti del dominio, escluso $x = \frac{3}{2}$, che, come si deduce dal grafico, è un punto angoloso. Negli intervalli *[0; 2] e [4; 6]* la funzione è continua; nell'intervallo *(0; 2)* non è derivabile (x=3/2 punto angoloso): in tale intervallo NON vale il teorema di Lagrange. Nell'intervallo *(4; 6)* è derivabile, quindi in esso valgono le ipotesi del teorema di Lagrange.

Cerchiamo i punti c (interni all'intervallo *[4; 6]*) per i quali: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La funzione ha equazione $f(x) = \frac{2x-3}{x-3}$ ed è $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(6)-f(4)}{2} = \frac{3-5}{2} = -1 = f'(c)$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-3)}{(x-3)^2} = -\frac{3}{(x-3)^2}$$

Deve essere: $-\frac{3}{(x-3)^2} = -1$, $(x-3)^2 = 3$, $x-3 = \pm\sqrt{3}$, $x = 3 \pm \sqrt{3}$: $c = 3+\sqrt{3}$

Non esiste alcun intervallo [a; b] in cui si possa applicare il teorema di Rolle.

Infatti, oltre alla continuità nell'intervallo chiuso e alla derivabilità nell'aperto dovrebbe verificarsi che f(a)=f(b). Ma se osserviamo il grafico, una qualsiasi retta parallela all'asse x che incontri il grafico di f in due punti o ha all'interno il 3/2 (punto di non derivabilità) o il 3 (punto di discontinuità). Le tre ipotesi non sono quindi mai verificate.

QUESITO 5

Sia $f(x) = sen(x) + cos(x)$. Determinare $f^{(2017)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

Calcoliamo le prime derivate di f:

$$f'(x) = \cos(x) - sen(x), \quad f''(x) = -sen(x) - \cos(x), \qquad f'''(x) = -\cos(x) + sen(x),$$

$$f^{(4)}(x) = sen(x) + \cos(x) = f(x)$$

Le derivate quindi si ripetono con ciclicità pari a 4; siccome il resto della divisione di 2017 per 4 è uguale a 1, risulta:

$$f^{(2017)}(x) = f'(x) = \cos(x) - sen(x)$$

QUESITO 6

Determinare la distanza tra il punto $P(6,6,8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

La distanza richiesta può essere trovata cercando il piano per P perpendicolare alla retta data, cercando l'intersezione H tra il piano suddetto e la retta data e calcolando la distanza PH.

Per scrivere l'equazione del piano in questione ci servono i parametri direttori della retta data, che conviene riscrivere in forma parametrica (poniamo $y = t$):

$$\begin{cases} x = 2z + 1 + y = 2 + 2t + 1 + t = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Una terna di parametri direttori della retta (uguali a quelli del piano ad essa perpendicolare) sono: $(3; 1;\ 1)$.

Il piano perpendicolare alla retta ha equazione del tipo: $3x + y + z + d = 0$; imponiamo il passaggio per $P(6,6,8)$: $18 + 6 + 8 + d = 0,\ \ d = -32$: $3x + y + z - 32 = 0$

Cerchiamo l'intersezione H fra la retta data ed il piano per P ad essa perpendicolare:
$3(3 + 3t) + (t) + (1 + t) - 32 = 0, \qquad 11t - 22 = 0, \qquad t = 2$

Quindi H ha coordinate:

$$H: \begin{cases} x = 3 + 3t = 9 \\ y = t = 2 \\ z = 1 + t = 3 \end{cases} \qquad H = (9; 2; 3)$$

Calcoliamo ora la distanza di $P(6,6,8)$ da $H = (9; 2; 3)$, che è la distanza richiesta:

$$PH = \sqrt{(9-6)^2 + (2-6)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

QUESITO 7

Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

I due giocatori realizzano almeno un punto se nessuno dei due resta a zero, quindi non deve vincere 3 volte di seguito Barbara né 6 volte di seguito Alberto.
La probabilità che Barbara vinca 3 volte di seguito è uguale alla probabilità che esca tre volte di seguito il 5 o il 6: $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{27}$.

La probabilità che Alberto vinca 6 volte di seguito è uguale alla probabilità che esca sei volte di seguito 1 oppure 2, oppure 3, oppure 4: $\left(\frac{4}{6}\right)^6=\frac{64}{729}$.

La probabilità che nessuno dei due resti a zero (quindi che ognuno faccia almeno 1 punto) è:

$$1-\left(\frac{1}{27}+\frac{64}{729}\right)=\frac{638}{729}\cong 88\ \%$$

La seconda domanda equivale a chiedere la probabilità che Alberto faccia 1 punto 4 volte e Barbara faccia 2 punti 2 volte, cioè che su 6 partite Alberto faccia 1 punto 4 volte. Si tratta di una distribuzione binomiale con probabilità del successo (fare 1 punto) uguale a $\frac{4}{6}$, n=6 prove e x=4 successi:

$$p=\binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x}=\binom{6}{4}\left(\frac{4}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2=15\cdot\frac{16}{729}=\frac{80}{243}\cong 33\ \%$$

QUESITO 8

Stabilire se le rette:

$$r:\quad y=5x-6$$
$$s:\quad y=21x+25$$

sono tangenti alla curva δ di equazione: $y=x^3-2x^2+x+1$

In generale due curve di equazioni y=f(x) e y=g(x) sono tangenti se:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$$

Nel caso della retta r deve essere:

$$\begin{cases} x^3-2x^2+x+1=5x-6 \\ 3x^2-4x+1=5 \end{cases};\ \begin{cases} x^3-2x^2-4x+7=0 \\ 3x^2-4x-4=0 \end{cases};\ \begin{cases} x^3-2x^2-4x+7=0 \\ x=2, \quad x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

La seconda equazioni ha le soluzioni $x = 2,\ x = -\frac{2}{3}$; verifichiamo se questi valori soddisfano la prima equazione:

se $x = 2$ sostituendo in $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ si ha: $8 - 8 - 8 + 7 = 0\ : no;$

se $x = -\frac{2}{3}$ sostituendo in $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ si ha: $-\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 7 = 0\ : no.$

Quindi la retta r NON è tangente alla curva δ.

Nel caso della retta s deve essere:

$$\begin{cases} x^3-2x^2+x+1=21x+25 \\ 3x^2-4x+1=21 \end{cases};\ \begin{cases} x^3-2x^2-20x-24=0 \\ 3x^2-4x-20=0 \end{cases};\ \begin{cases} x^3-2x^2-20x-24=0 \\ x=-2, \quad x=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

La seconda equazioni ha le soluzioni $x = -2,\ x = \frac{10}{3}$; verifichiamo se questi valori soddisfano la prima equazione:
se $x = -2$ sostituendo in $x^3 - 2x^2 - 20x - 24 = 0$ si ha: $-8 - 8 + 40 - 24 = 0\ : sì;$
se $x = \frac{10}{3}$ sostituendo in $x^3 - 2x^2 - 20x - 24 = 0$ si ha: $\frac{1000}{27} - \frac{200}{9} - \frac{200}{3} - 24 = 0\ : no.$

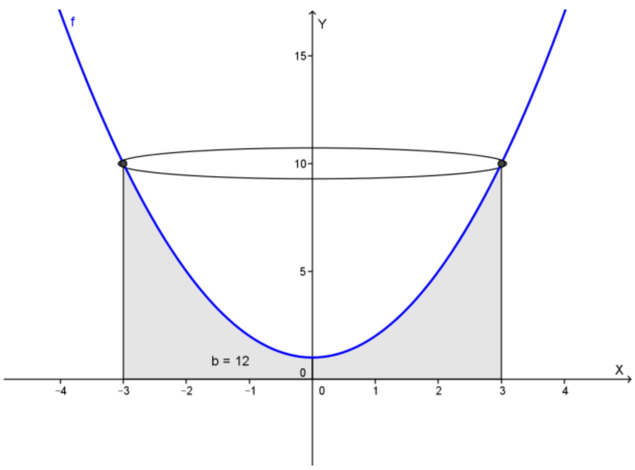
Quindi la retta r è tangente alla curva δ per $x = -2$, nel punto di coordinate $(-2;\ -17)$.

QUESITO 9

Data la funzione:

$$f(x) = x^2 + 1 \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x \in [0;\ 3]$.



Da $y = x^2 + 1$ otteniamo (per $x \geq 0$) $x = \sqrt{y-1}$. Il volume del solido richiesto si ottiene

sottraendo al volume del cilindro con raggio di base 3 e altezza 10 il volume del solido ottenuto mediante l'integrale (se x=0, y=1 e se x=3 y=10):

$$\pi \int_1^{10} x^2 dy = \pi \int_1^{10} (y-1)dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^{10} = \pi \left[50 - 10 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{81}{2}\pi$$

Il volume del cilindro è: $\pi r^2 h = \pi \cdot 9 \cdot 10 = 90\pi$.

Il solido richiesto ha quindi volume:

$$V = 90\pi - \frac{81}{2}\pi = \frac{99}{2}\pi \ u^3$$

Il volume richiesto può essere calcolato anche con il metodo dei gusci cilindrici: si veda approfondimento alla pagina

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

$$V = 2\pi \int_0^3 xf(x)dx = 2\pi \int_0^3 x(x^2+1)dx = 2\pi \int_0^3 (x^3 + x)dx = 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{99}{2}\pi \ u^3 = V$$

QUESITO 10

Trovare una funzione g, il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:

$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) = 1, \quad g^{(4)}(0) = 1, \quad g^{(5)}(0) = 1$

Le prime tre condizioni sono soddisfatta da $g(x) = ax^3 + bx^4 + cx^5$
Calcoliamo le derivate successive:

$$g'(x) = 3ax^2 + 4bx^3 + 5cx^4$$

$$g''(x) = 6ax + 12bx^2 + 20cx^3$$

$$g'''(x) = 6a + 24bx + 60cx^2$$

$$g^{(4)}(x) = 24b + 120cx$$

$$g^{(5)}(x) = 120c$$

Imponendo le ultime tre condizioni si ha:

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 24b = 1 \\ 120c = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{24} \\ c = \dfrac{1}{120} \end{cases}$$

Alternativamente, possiamo partire dall'ultima condizione, $g^{(5)}(0) = 1$, e dire che è soddisfatta da $g^{(5)}(x) = 1$; integrando si ha $g^{(4)}(x) = x + a$ e da $g^{(4)}(0) = 1$ segue a=1, quindi $g^{(4)}(x) = x + 1$; segue che $g'''(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + b$ e da $g'''(0) = 1$, b=1. Quindi: $g'''(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ da cui $g''(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$ e da $g''(0) = 0$, c=0, quindi: $g''(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ da cui $g'(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + d$ e da $g'(0) = 0$, d=0; si ha quindi: $g'(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$; integrando ancora:

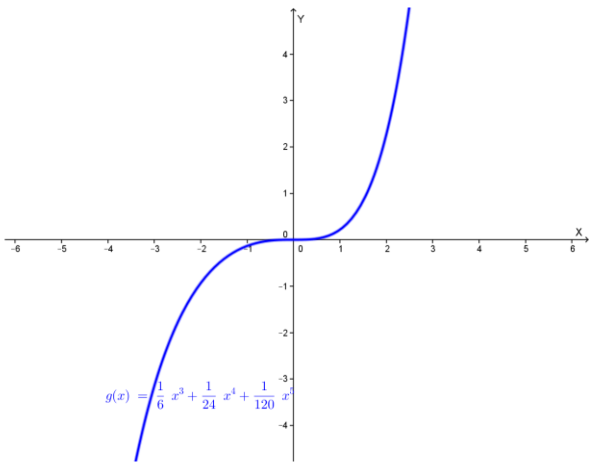
$g(x) = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + e$ e da g(0)=0 segue e=0.

Una funzione che soddisfa le condizioni date è quindi:

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

che è definita su ogni intervallo contenente 0.

Il grafico di tale funzione (non richiesto) è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria