SESSIONE SUPPLETIVA - 2017

PROBLEMA 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A, B, C, come in figura 1.

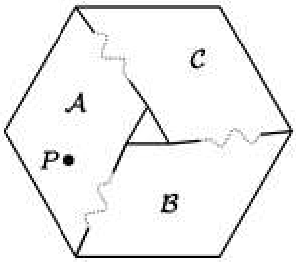


Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.

Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in A, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).
Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x), p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1)

Dimostrare che

$$p_1(x) = (1-x)^2\,, \quad p_2(x) = 2x(1-x)^2, \quad p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$

e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0; 1]$.

Indichiamo con AB, AC e BC i tre varchi e d indichiamo con V (vero) se il varco è aperto e con F (falso) se il varco è chiuso. Le otto possibili configurazioni sono le seguenti:

	AB	AC	BC	n. settori raggiungibili	percorsi possibili	probabilità
1	V	V	V	3	ABC, ACB, ABAC,ACAB	$x \cdot x \cdot x$
2	V	V	F	3	ABAC, ACAB	$x \cdot x \cdot (1-x)$
3	V	F	V	3	ABC	$x \cdot (1-x) \cdot x$
4	V	F	F	2	AB	$x \cdot (1-x) \cdot (1-x)$
5	F	V	V	3	ACB	$(1-x) \cdot x \cdot x$
6	F	V	F	2	AC	$(1-x) \cdot x \cdot (1-x)$
7	F	F	V	1	A	$(1-x) \cdot (1-x) \cdot x$
8	F	F	F	1	A	$(1-x) \cdot (1-x) \cdot (1-x)$

Le probabilità richieste sono:

$$p_1(x) = (1-x) \cdot (1-x) \cdot x + (1-x) \cdot (1-x) \cdot (1-x) = (1-x)^2$$

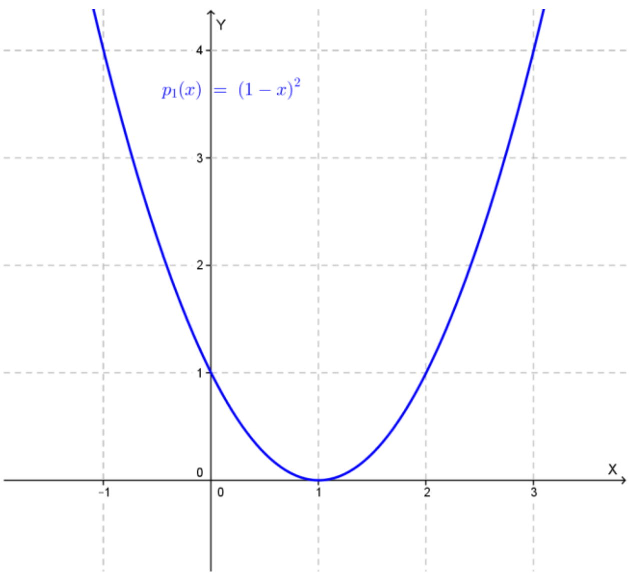
$$p_2(x) = x \cdot (1-x) \cdot (1-x) + (1-x) \cdot x \cdot (1-x) = 2x(1-x)^2$$

$$p_3(x) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot (1-x) + x \cdot (1-x) \cdot x + (1-x) \cdot x \cdot x = x^3 + 3x^2(1-x)$$

Studiamo le tre funzioni.

$p_1(x) = (1-x)^2$

Si tratta di una parabola tangente all'asse x nel punto di ascissa 1, che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1:



$p_2(x) = 2x(1-x)^2$

Si tratta di una cubica quindi è definita, continua e derivabile su tutto R. Taglia l'asse x nei punti di ascissa x=0 e x=1 (punto di tangenza). I limiti + e – infinito sono rispettivamente + e – infinito. E' sufficiente studiare la derivata prima (per i massimi e minimi) e la derivata seconda (per il flesso, che è sempre presente e unico per le cubiche ed è centro di simmetria per il grafico).

Derivata prima:

$$p_2'(x) = 2(1-x)^2 + 2x\big(2(1-x)(-1)\big) = 6x^2 - 8x + 2 \geq 0 \quad se\ \ x \leq \frac{1}{3}\ \ or\ \ x \geq 1$$

La funzione è quindi crescente $se\ \ x < \frac{1}{3}\ \ or\ \ x > 1$ e decrescente $se\ \ \frac{1}{3} < x < 1$

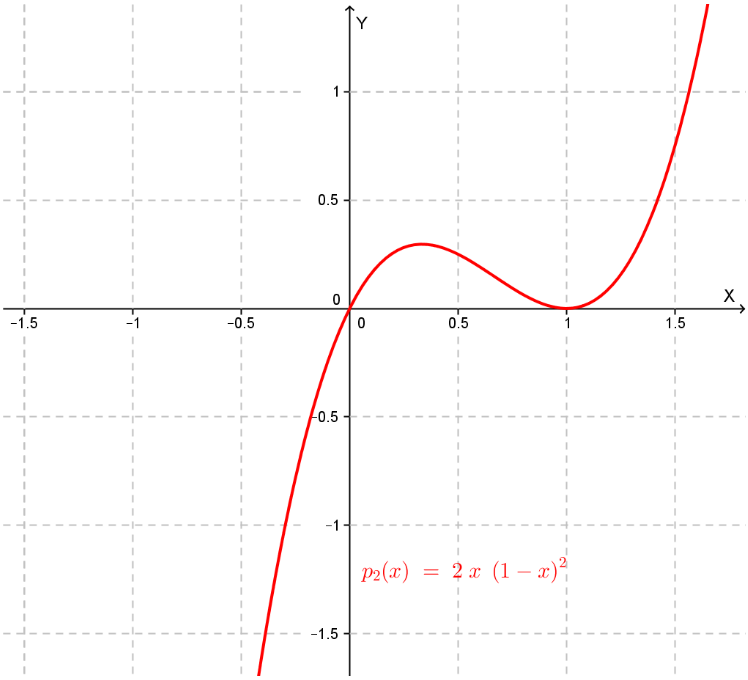
$x = \frac{1}{3}:\quad punto\ di\ massimo\ relativo,\ \ x = 1:\ \ punto\ di\ minimo\ relativo$

$M = \left(\frac{1}{3}; \frac{8}{27}\right),\ \ m = (1; 0)$

Derivata seconda:

$$p''(x) = 12x - 8 \geq 0\ \ se\ \ x \geq \frac{2}{3}$$

Concavità verso l'alto se $x > \frac{2}{3}$, verso il basso se $x < \frac{2}{3}$, punto di flesso $x = \frac{2}{3}$, flesso: $F = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{27}\right)$.



$p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x) = x^2(3-2x) = -2x^3 + 3x^2$

Si tratta di una cubica quindi è definita, continua e derivabile su tutto R. Taglia l'asse x nei punti di ascissa x=0 (punto di tangenza) e x=3/2. I limiti + e – infinito sono rispettivamente - e + infinito. E' sufficiente studiare la derivata prima (per i massimi e minimi) e la derivata seconda (per il flesso, che è sempre presente e unico per le cubiche ed è centro di simmetria per il grafico).

Derivata prima:

$p_3'(x) = -6x^2 + 6x \geq 0 \quad se \;\; 0 \leq x \leq \; 1$

La funzione è quindi crescente $se \;\; 0 < x < \; 1$ e decrescente $se \;\; x < 0 \;\; or \;\; x > 1$

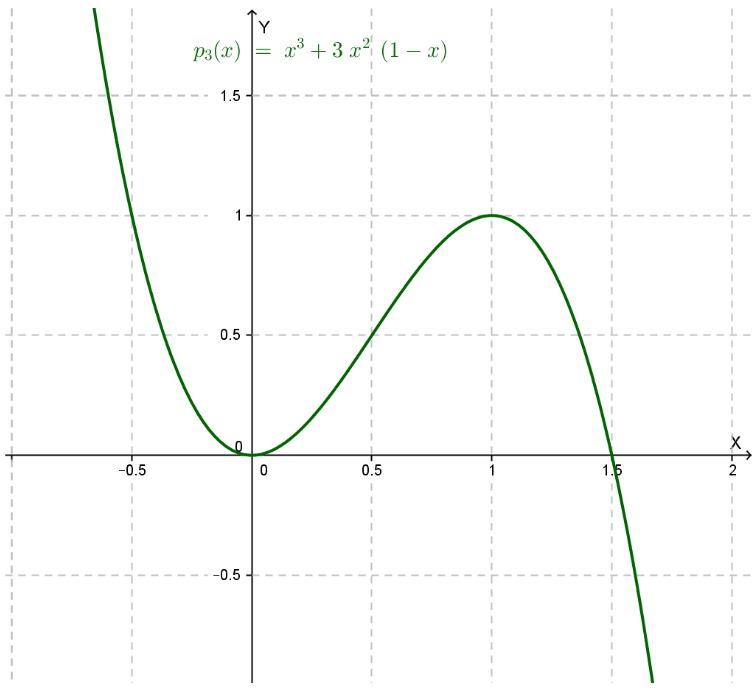
$x = 0: \;\; punto\ di\ minimo\ relativo, \;\; x = 1: \;\; punto\ di\ massimo\ relativo$

$m = (0;0), \;\; M = (1;1)$

Derivata seconda:

$p''(x) = -12x + 6 \geq 0 \;\; se \;\; x \leq \frac{1}{2}$

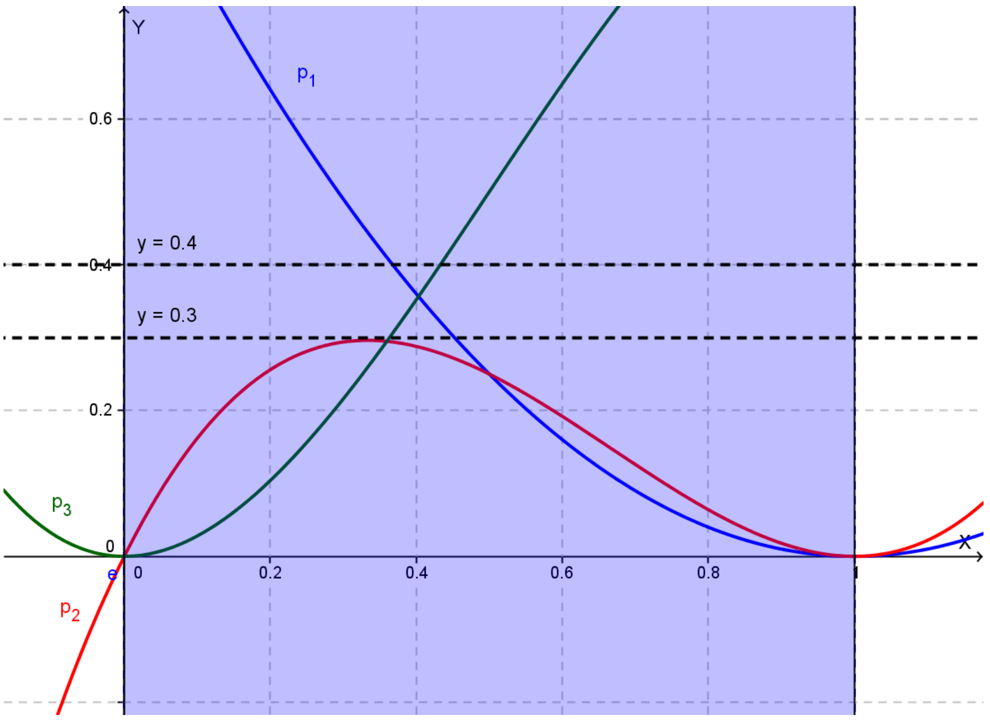
Concavità verso l'alto se $x < \frac{1}{2}$, verso il basso se $x > \frac{1}{2}$, punto di flesso $x = \frac{1}{2}$, flesso: $F = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



2)

È vero che, qualunque sia $x \in [0;1]$, *almeno una delle probabilità* $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ *deve essere maggiore di* $0{,}3$ *e almeno una deve essere minore di* $0{,}4$?

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le tre curve, evidenziando le parti con ascissa nell'intervallo [0; 1].



Dal grafico si evince che da 0 fino all'ascissa dell'intersezione fra i grafici di p_1 *e* p_3, almeno la p_1 supera 0.3; dopo tale ascissa (e fino a 1) almeno la p_3 supera 0.3.

Dal grafico è anche evidente che almeno una curva (la p_2) è sotto la retta y=0.4 (in alcuni tratti anche p_1 *e* p_3): quindi nell'intervallo [0; 1] almeno una delle tre probabilità è inferiore a 0.4.

3)

Provare che esiste un unico $x_0 \in [0;1]$ *tale che:* $p_1(x_0) = p_3(x_0)$ *e stabilire se vale la disuguaglianza:* $x_0 > \frac{1}{2}$.
Discutere inoltre, al variare di $x\ in\ [0;1]$, *quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da* $\mathcal{P}$ *siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.*

Dall'andamento di $p_1 \; e \; p_3$ nell'intervallo [0; 1], la prima decrescente, la seconda crescente, si deduce che i due grafici si incontrano in un solo punto x_0. Valutiamo le due probabilità in $\frac{1}{2}$. Risulta: $p_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \; e \; p_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Quindi $p_3\left(\frac{1}{2}\right)>p_1\left(\frac{1}{2}\right)$ e perciò il punto x_0 è a sinistra di ½ : quindi non vale la disuguaglianza: $x_0>\frac{1}{2}$.

Al variare di $x \; in \; [0;1]$ si ha che:

se $0 \leq x < x_0$ la probabilità maggiore è p_1, per $x = x_0$, $p_1 = p_3$ sono le probabilità maggiori, se $x_0 < x \leq 1$ la probabilità maggiore è p_3.

Per quanto riguarda le probabilità minori cerchiamo le intersezioni tra i grafici di p_2 con $p_1 \; e \; con \; p_3$.

Fra $p_2 \; e \; p_3$ abbiamo:

$2x-4x^2+2x^3=-2x^3+3x^2, \; 4x^3-7x^2+2x=0, \quad x\left(4x^2-7x+2\right)=0$ da cui:

$$x=0\,, \;\; x=\frac{7-\sqrt{17}}{8}\cong 0.36, \qquad x=\frac{\sqrt{17}+7}{8}\cong 1.40$$

Quindi, nell'intervallo [0; 1] $p_2 \; e \; p_3$ sono uguali per $x=0 \; e \; x=\frac{7-\sqrt{17}}{8}\cong 0.36$

Fra $p_2 \; e \; p_1$ abbiamo:

$$2x(1-x)^2=(1-x)^2, \quad x=1 \;\; e \;\; x=\frac{1}{2}$$

Quindi per quanto riguarda le probabilità minori abbiamo la seguente situazione:

se $x=0$ le probabilità minori sono $p_2 \; e \; p_3$ (entrambe pari a 0);

se $<x<\frac{7-\sqrt{17}}{8}$ la probabilità minore è p_3 ;

se $x=\frac{7-\sqrt{17}}{8}$ le probabilità minore sono $p_2 \; e \; p_3$;

se $\frac{7-\sqrt{17}}{8}<x<\frac{1}{2}$ la probabilità minore è p_2 ;

se $\frac{1}{2}<x<1$ la probabilità minore è p_1 ;

se $x=1$ le probabilità minore sono $p_1 \; e \; p_2$ (entrambe pari a 0).

4)

Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ *. Nel caso* $x=\frac{1}{2}$ *quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?*

Ricordiamo che il valor medio di una funzione f(x) nell'intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Nel nostro caso a=0 e b=1, quindi i tre valori medi sono:

$$M_1 = M(p_1) = \int_0^1 p_1(x)dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)dx = \left[x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$M_2 = M(p_2) = \int_0^1 p_2(x)dx = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx = \int_0^1 (2x - 4x^2 + 2x^3)dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_3 = M(p_3) = \int_0^1 p_3(x)dx = \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Detta X la variabile aleatoria che fornisce il numero di settori raggiungibili, essa assume i valori $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ con probabilità rispettivamente $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, p_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, p_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Il valor medio di X è dato da:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2.25 = M(X)$$

La varianza di X è data da:

$$Var(X) = \sigma^2 = (x_1 - M)^2 p_1 + (x_2 - M)^2 p_2 + (x_3 - M)^2 p_3 =$$

$$= \left(1 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16} = 0.6875 = Var(X)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria