SESSIONE SUPPLETIVA - 2017

PROBLEMA 2

Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x)sen(2x).$$

1)

Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.

Devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(x)sen(2x) = g(x) \\ g'(x)sen(2x) + g(x) \cdot 2\cos(2x) = g'(x) \end{cases}$$

Se g(x)=0 anche f(x)=0 quindi le due funzioni coincidono e pertanto sono tangenti in ogni punto. Escludendo questo caso, dalla prima equazione ricaviamo:

$sen(2x) = 1, \;\; 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Per tale valore di x è soddisfatta anche la seconda equazione, che diventa $g'(x) = g'(x)$.

2)

Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.

Posto $y = g(x)$, l'equazione differenziale assume la forma: $y' = -2y$. Questa equazione ha la soluzione particolare y=0, cioè g(x)=0, che però non soddisfa la condizione iniziale $g(0) = 4$. Per $y \neq 0$ abbiamo:

$$\frac{y'}{y} = -2 \; , \qquad \frac{dy}{y} = -2\,dx$$

Integrando si ha: $\ln|y| = -2x + c, \;\; |y| = e^{-2x+c} = e^c e^{-2x}, \;\; y = \pm\, e^c e^{-2x} = ke^{-2x}$ (con k numero reale non nullo).

Quindi $g(x) = ke^{-2x}$ (notiamo che la soluzione y=0 si può ritrovare per k=0); dovendo essere $g(0) = 4$, abbiamo: $k = 4$.

La funzione richiesta è quindi: $g(x) = 4e^{-2x}$.

3)

Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ *(k numero intero)? Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x? Motiva le tue risposte.*

Risulta:

$$f(x) = g(x)sen(2x) = 4\,sen(2x)e^{-2x}$$

Siccome i grafici di f e g sono tangenti nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, in tali punti la derivata di f è uguale alla derivata di g; la derivata di g (che è $-8e^{-2x}$) in tali punti non si annulla, pertanto neanche la derivata di f si annulla; essendo f sempre derivabile (prodotto di funzioni ovunque derivabili), nei punti di massimo relativo la sua derivata dovrebbe annullarsi.
Possiamo quindi concludere che:

il grafico della funzione f NON presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Le ascisse dei punti di intersezione del grafico di f con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione

$4\,sen(2x)e^{-2x} = 0$, $\quad sen(2x) = 0,$ $\quad 2x = k\pi,$ $\quad x = \frac{k\pi}{2}$ $con\;\; k\;\; intero$.

Calcoliamo la derivata seconda di f:

$$f'(x) = 8\cos(2x)\,e^{-2x} + 4\,sen(2x)(-2e^{-2x}) = 8e^{-2x}(\cos(2x) - sen(2x))$$

$$f''(x) = 8\left[-2e^{-2x}\left(\cos(2x) - sen(2x)\right) + e^{-2x}(-2sen(2x) - 2\cos(2x))\right] =$$

$$= -16e^{-2x}[\cos(2x) - sen(2x) + sen(2x) + \cos(2x)] = -32\cos(2x)\,e^{-2x} = f''(x)$$

Si ha:

$f''\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -32\cos(k\pi)\,e^{-k\pi} \neq 0\;\; per\; ogni\; k\; intero$, poiché $\cos(k\pi) = \pm 1$.

Siccome la f è infinitamente derivabile, condizione necessaria perché un punto sia di flesso è che in esso la derivata seconda si annulli, quindi:

nei punti di intersezione con l'asse x NON ci sono punti di flesso.

4)

Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

e, posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H?

Per calcolare I determiniamo prima una primitiva di f(x) integrando per parti:

$$A = \int f(x)dx = \int 4\,sen(2x)e^{-2x}dx = \int -2\,sen(2x)(-2e^{-2x})dx = \int -2\,sen(2x)(e^{-2x})'dx$$

$$= \left(-2\,sen(2x)\right)(e^{-2x}) - \int \left(-2\,sen(2x)\right)'(e^{-2x})dx =$$

$$= \ -2\,e^{-2x}sen(2x) + 4\int \cos(2x)\,e^{-2x}dx = -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\left[\int \cos(2x)\,(-2e^{-2x})dx\right] =$$

$$= -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\left[\int \cos(2x)\,(e^{-2x})'dx\right] =$$

$$= -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\left[\cos(2x)e^{-2x} - \int (\cos(2x))'\ e^{-2x}dx\right] =$$

$$= -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\left[\cos(2x)e^{-2x} - \int -2sen(2x)e^{-2x}dx\right] =$$

$$= -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\cos(2x)e^{-2x} - \int 4sen(2x)e^{-2x}dx =$$

$$= -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\cos(2x)e^{-2x} - A = A, \quad 2A = -2\,e^{-2x}sen(2x) - 2\cos(2x)e^{-2x},$$

$$A = -e^{-2x}(sen(2x) + \cos(2x)) + c$$

Quindi:

$$\int 4\,sen(2x)e^{-2x}dx = -e^{-2x}(sen(2x) + \cos(2x)) + c = -\sqrt{2}e^{-2x}sen\left(2x + \tfrac{\pi}{4}\right)\text{+c}$$

Calcoliamo ora I:

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b 4\,sen(2x)e^{-2x}dx\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\sqrt{2}e^{-2x}sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^b =$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-2b}sen\left(2b + \tfrac{\pi}{4}\right) - sen\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = -\sqrt{2}\left(0 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = I$$

N.B. $\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-2b}sen\left(2b+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ è uguale a 0 per il teorema del confronto, essendo il prodotto fra un infinitesimo ed una funzione limitata.

Per dimostrare che H è finito osserviamo che:

$f(x)\le|f(x)|=|4\,sen(2x)e^{-2x}|\le 4e^{-2x}$

Quindi, per una nota proprietà dell'integrale definito:

$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\le\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx\le\int_0^{+\infty}4e^{-2x}\,dx,\ cio\grave{e}\ \ 1\le H\le\int_0^{+\infty}4e^{-2x}\,dx$

Calcoliamo $\int_0^{+\infty}4e^{-2x}\,dx$.

$\int 4e^{-2x}\,dx=-2\int -2\,e^{-2x}\,dx=-2e^{-2x}+c$

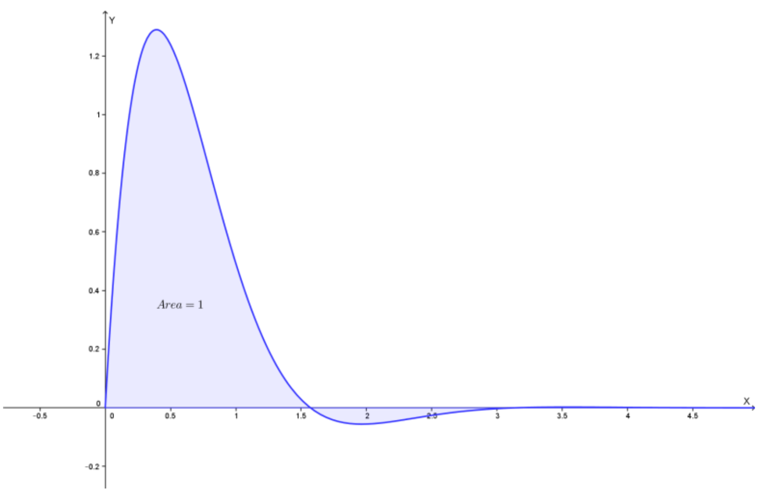
Quindi:

$$\int_0^{+\infty}4e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b 4e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}[-2e^{-2x}]_0^b=\lim_{b\to+\infty}(-2e^{-2b}+2)=2$$

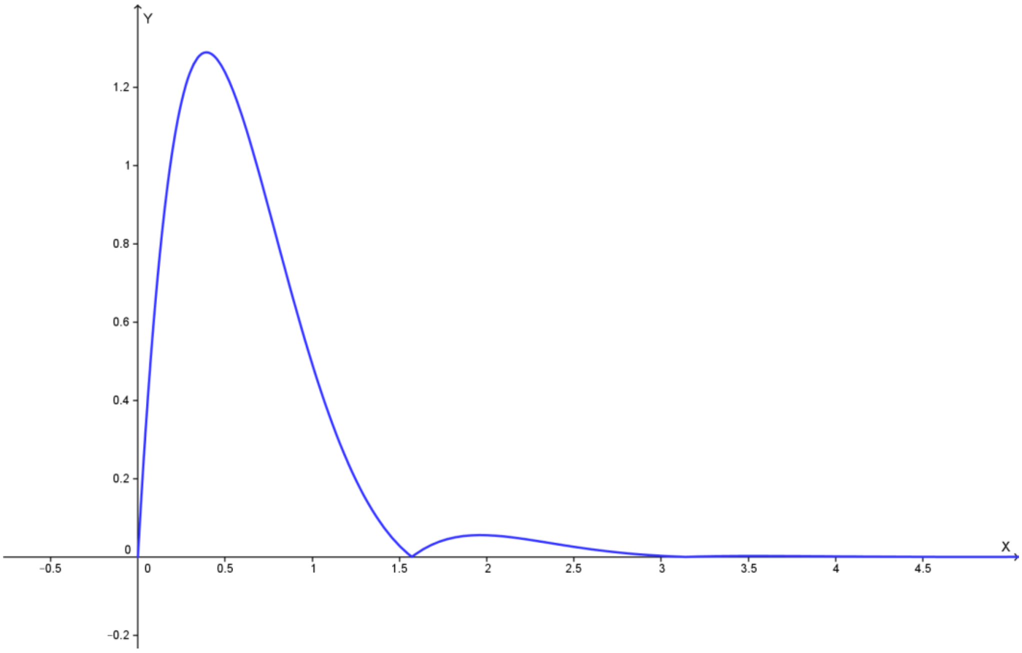
Perciò:

$$1\le H=\int_0^{+\infty}|f(x)|\,dx\le\int_0^{+\infty}4e^{-2x}\,dx=2:\qquad 1\le H\le 2$$

Il valore di I rappresenta l'area (in senso algebrico) della regione (illimitata) di piano compresa fra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[0;\ +\infty)$; ricordiamo che dove f è negativa l'area si considera negativa:



Il valore di H rappresenta l'area della regione (illimitata) di piano compresa fra il grafico di $|f|$ e l'asse x nell'intervallo $[0;\ +\infty)$:



Con la collaborazione di Angela Santamaria