



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
X02Y – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LIC2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE CINESE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.

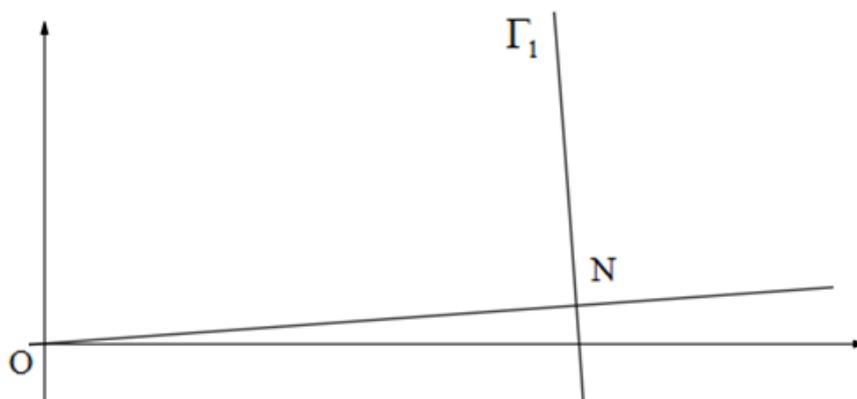
PROBLEMA 1

Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k , tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 , s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T , questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.





Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\} \quad \text{e} \quad g(x) = x - f(x)$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3$, $g(4,79) = 0,79$.

1. A partire dalle definizioni delle funzioni f e g , mostra che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq g(x) < 1$. Disegna i grafici delle funzioni f e g determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione g è periodica di periodo 1, calcola la media di g nell'intervallo $[0, n]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Calcola inoltre la media di g nell'intervallo $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$, e determina il limite a cui tale media tende per $n \rightarrow \infty$.
3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\frac{\pi}{6}$ radianti intorno all'asse x della regione di piano delimitata dai grafici di f e g nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni¹

$$\min g = \min h, \quad \sup g = \max h, \quad 2h' + 2h - 1 = 0$$

Quante sono le funzioni siffatte?

¹ $\min g$ = minimo della funzione g ,

$\sup g$ = estremo superiore della funzione g ,

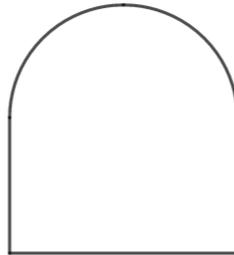
$\max h$ = massimo della funzione h



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESTIONARIO

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
4. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.
5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come nel disegno:



Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3) dx$$

sia uguale a 10.

7. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
8. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

9. Trovare l'area R della regione di spazio racchiusa dalla curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{per } 4 \leq x \leq 9$$

Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k .

10. Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k , la funzione $y = ke^{-x} \text{sen}(x + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate $(0,1)$.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.