Sessione suppletiva 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia dato un sistema di assi cartesiani *Oxy* in cui l'unità corrisponde a 1 metro. Una particella puntiforme si muove lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo, partendo dall'origine, con una velocità di 2 metri al secondo. Quando la particella si trova in un generico punto $x = a$, costruisci un triangolo prendendo le tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a.

1) Determina l'area del triangolo in funzione di a; quanto vale l'area del triangolo dopo 5 secondi?

2) Dopo quanti secondi il triangolo diventa equilatero?

3) Esprimi in funzione di a l'angolo θ formato dalle due tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a; utilizzando l'espressione di θ in funzione di a, verifica la correttezza della risposta che hai fornito al punto precedente.

4) Quando la particella si trova nel generico punto $x = a$, determina l'area della superficie limitata superiormente dalle due rette tangenti e inferiormente dalla curva di equazione $y = ax - x^2$.

PROBLEMA 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \quad \text{e} \quad g_k(x) = e^{\frac{x}{k}},$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, le due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni:

   $$a(x) = f_k(g_k(x)) \quad \text{e} \quad b(x) = g_k(f_k(x)),$$

   stabilisci se si verifica $a(x) = b(x), \forall x \in \Re$.

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 insieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione $y = x$. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.

4. Sia *A* la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani.
Determina l'area di *A* ed il volume del solido generato ruotando *A* attorno a uno degli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia *R* la regione piana delimitata dal segmento *AB* e dall'arco di curva avente equazione $y = 4sen\,x$, con $0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in *R* avente un lato contenuto nel segmento *AB*.

2. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [*p*, 2*p*] e, detto Γ il suo grafico, sia *t* la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa *p*. Determinare, al variare di *p*, le aree delle due parti in cui la retta *t* divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1,-1,2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

4. Verificare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)dx$ per $n > 1$ e usare questo risultato per calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)dx$.

5. Si lancia *n* volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di *n* tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%?

6. Data la funzione $y = x\left|ax^2 + b\right| - 3$, determinare il valore dei coefficienti *a* e *b* per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.

7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia *t* la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e *t*.

8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo [0, 10], è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{12}, & 1<x\le 10\end{cases}$$

Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.

9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x,y,z)$ equidistanti dai punti $A(0,1,2)$ e $B(-3,2,0)$.

10. Verificare che la funzione $y=e^{-x}senx$ è soluzione dell'equazione differenziale $y''+2y'+2y=0$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.