SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA - SUPPLETIVA 2018

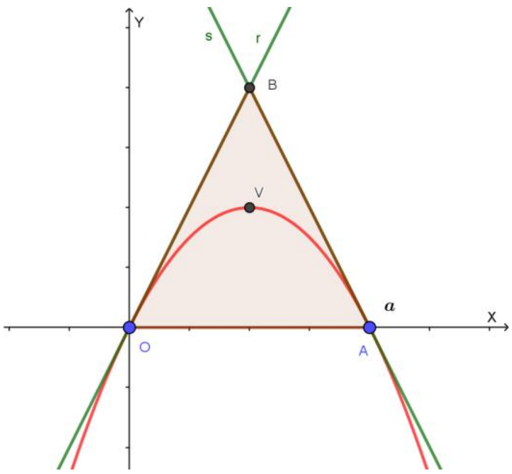
PROBLEMA 1

Sia dato un sistema di assi cartesiani Oxy in cui l'unità corrisponde a 1 metro. Una particella puntiforme si muove lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo, partendo dall'origine, con una velocità di 2 metri al secondo. Quando la particella si trova in un generico punto $x = a$, costruisci un triangolo prendendo le tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a.

La parabola ha la concavità verso il basso, taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 e a ed ha vertice in $V = \left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{4}\right)$. Essendo $y' = a - 2x$, la tangente r in O=(0; 0) ha coefficiente angolare a e la tangente s in A=(a; 0) coefficiente angolare $-a$. Le due tangenti hanno quindi equazioni:

$r\colon\ y = ax\,, \quad s\colon\ y = -a(x-a)\,,\ \ y = -ax + a^2\,.$

Situazione grafica:



1)

Determina l'area del triangolo in funzione di a; quanto vale l'area del triangolo dopo 5 secondi?

Cerchiamo l'intersezione B fra le due tangenti. Data la simmetria di O ed A rispetto all'asse della parabola, le due tangenti si incontrano su tale asse, quindi B ha ascissa $\frac{a}{2}$.
Sostituendo, per esempio, nell'equazione di r, troviamo l'ordinata di B: $y = \frac{a^2}{2}$.

Poiché il triangolo è isoscele su OA ed ha altezza pari all'ordinata di B, abbiamo:

$$Area(OAB) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}a^3$$

Siccome il punto si muove con velocità $v = 2\ m/s$, risulta $x = vt = 10\ m$. Quindi dopo 5 secondi $a = 10$ e perciò il triangolo ha area:

$$Area(a = 10) = \frac{1}{4} \cdot 10^3 = 250\ \ m^2$$

2)

Dopo quanti secondi il triangolo diventa equilatero?

Il triangolo OAB è equilatero quando la retta r forma con l'asse x un angolo di 60°, quindi Il coefficiente angolare a deve essere uguale a $tg\ 60° = \sqrt{3}$.

Il triangolo diventa equilatero quando $a = \sqrt{3}$. Dalla relazione $x = vt = 2t$ otteniamo:

$$a = \sqrt{3} = 2t, \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87 \quad secondi\ .$$

3)

Esprimi in funzione di a l'angolo θ formato dalle due tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a; utilizzando l'espressione di θ in funzione di a, verifica la correttezza della risposta che hai fornito al punto precedente.

L'angolo θ formato dalle due tangenti (escluso il caso in cui le due tangenti sono perpendicolari, $a = 1$) è tale che:

$$tg\ \theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

(ricordiamo che se θ è l'angolo acuto formato da due rette non perpendicolari si ha $tg\ \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$).

- Se $0 < a < 1$ l'angolo α che r forma con l'asse x è minore di 45°, quindi θ è ottuso, $tg\ \theta < 0$:

$$tg\,\theta = -\left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = -\left|\frac{a + a}{1 - a^2}\right| = -\left(\frac{2a}{1 - a^2}\right) = \frac{2a}{a^2 - 1}\ , \quad quindi:\ \ \theta = arctg\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right)$$

- Se $a > 1$ risulta $45° < \alpha < 90°$, quindi θ è acuto, $tg\,\theta > 0$:

$$tg\,\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{a + a}{1 - a^2}\right| = \frac{2a}{a^2 - 1}\ , \quad quindi:\ \ \theta = arctg\left(\frac{2a}{a^2 - 1}\right)$$

Il triangolo è equilatero quando $\theta = 60°$ (θ acuto, $a > 1$), quindi deve essere:

$$\frac{2a}{a^2 - 1} = \sqrt{3}\,, \quad \sqrt{3}\,a^2 - 2a - \sqrt{3} = 0, \qquad da\ cui:$$

$$a = \sqrt{3}\ \ (che\ è\ la\ soluzione\ trovata\ nel\ punto\ precedente)\ \ e\ \ a = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ (non\ accettabile).$$

4)

Quando la particella si trova nel generico punto $x = a$, determina l'area della superficie limitata superiormente dalle due rette tangenti e inferiormente dalla curva di equazione $y = ax - x^2$.

L'area A richiesta si ottiene sottraendo all'area del triangolo OAB l'area del segmento parabolico OBV. L'area A_S del segmento parabolico si ottiene facilmente utilizzando il Teorema di Archimede:

$A_S = \frac{2}{3}\,OA \cdot y_V = \frac{2}{3}(a)\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{6}a^3$. Quindi:

$$A = Area(OAB) - A_S = \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{12}a^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria