SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2018 - PROBLEMA 2

Siano e rispettivamente $f: R \to Z$ *e* $g: R \to R$ *le funzioni* $parte\ intera$ *e* $parte\ frazionaria\ (o\ mantissa)$ *di un numero . Tali funzioni sono così definite:*

$$f(x) = max\{m \in Z \mid m \leq x\} \ \text{ e } \ g(x) = x - f(x)$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3$, $g(4.79) = 0.79$ *.*

1)

A partire dalle definizioni delle funzioni f e g, mostra che per ogni $x \in R$ *si ha*

$$0 \leq g(x) < 1 .$$

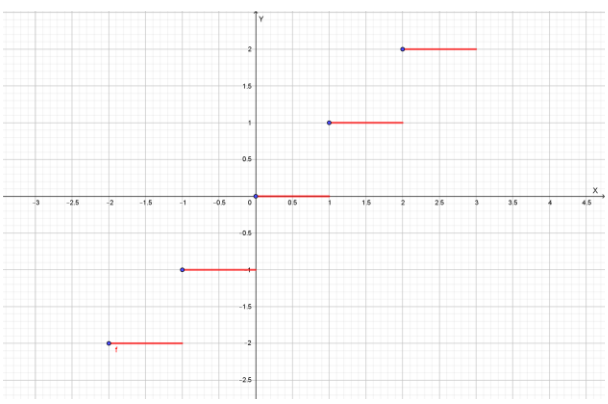
Disegna i grafici delle funzioni f e g determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.

Osserviamo che se x è intero, f(x)=x quindi g(x)=0; se invece x non è intero g(x) è un numero decimale del tipo 0.a per esempio:
$se\ x = 0.3\ si\ ha\ g(x) = 0.3, se\ x = 1{,}4\ g(x) = 0.4, se\ x = -0.2, g(x) = x - f(x) =$
$= -0.2 - f(-0.2) = -0.2 - (-1) = 0.8;\ se\ x = -2.3\ g(x) = -2.3 - f(-2.3) =$
$= -2.3 - (-3) = -2.3 + 3 = 0.7$

Quindi si ha sempre $0 \leq g(x) < 1$.

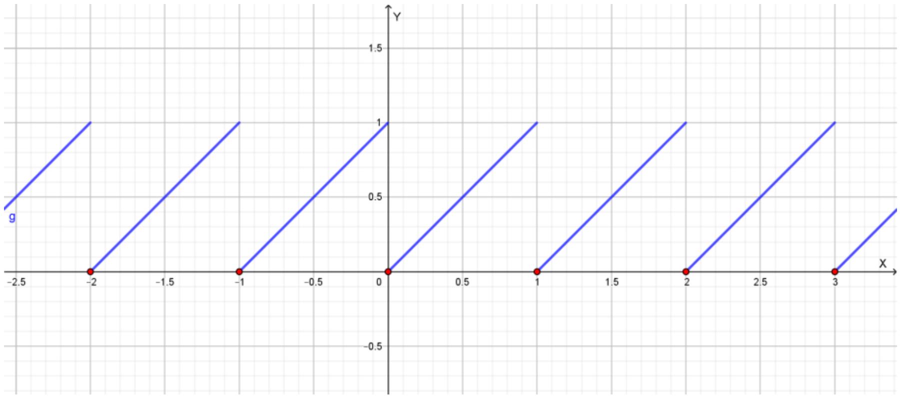
$$f(x) = max\{m \in Z \mid m \leq x\} = \begin{cases} \ldots \\ -2, & se -2 \leq x < -1 \\ -1, & se -1 \leq x < 0 \\ 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ 1 \leq x < 2 \\ 2, & se\ 2 \leq x < 3 \\ \ldots \end{cases}$$

Si tratta quindi di una “funzione a scala con il seguente grafico:



La funzione f(x) presenta infiniti punti di discontinuità di prima specie (con salto 1) per ogni x intero.

$$g(x) = x - f(x) = x - \begin{cases} \dots \\ -2, & se -2 \le x < -1 \\ -1, & se -1 \le x < 0 \\ 0, & se\ 0 \le x < 1 \\ 1, & se\ 1 \le x < 2 \\ 2, & se\ 2 \le x < 3 \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} \dots \\ x+2, & se -2 \le x < -1 \\ x+1, & se -1 \le x < 0 \\ x, & se\ 0 \le x < 1 \\ x-1, & se\ 1 \le x < 2 \\ x-2, & se\ 2 \le x < 3 \\ \dots \end{cases}$$



Anche la funzione g(x) presenta infiniti punti di discontinuità di prima specie (con salto 1) per ogni x intero.

2)

Dopo aver verificato che la funzione g è periodica di periodo 1, calcola la media di g nell'intervallo $[0, n]$ *qualsiasi sia* $n \in N, n > 0$. *Calcola inoltre la media di g nell'intervallo* $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$ *, e determina il limite a cui tale media tende per* $n \to \infty$ *.*

La periodicità della funzione g con periodo 1 si evince facilmente dal grafico, ottenuto da $y = x$ con successive traslazioni (verso sinistra e verso destra) di 1, quindi :

$T = 1$ *è il più piccolo numero reale positivo tale che:* $g(x) = g(x+1)$ *per ogni x*

Ricordiamo che la media di una funzione f, definita in un intervallo chiuso e limitato [a; b] ed ivi integrabile e limitata, è uguale a :

$$M = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Detti s ed S rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in [a; b], si dimostra che: $s \le M \le S$. Nel caso particolare in cui la funzione sia continua in [a; b], si dimostra che (Teorema della media) esiste almeno un punto c di tale intervallo tale che

$$f(c) = M.$$

Per calcolare la media di g osserviamo che g è limitata ed integrabile in qualsiasi intervallo chiuso e limitato del suo dominio (R), poiché possiede al più delle discontinuità di prima specie (si dice che è continua a tratti).

Osserviamo che l'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo [0; 1] è uguale a ½.

Quindi:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$$

Per la periodicità della funzione si avrà quindi:

$$\int_0^n g(x)dx = \frac{1}{2} \cdot n$$

Pertanto la media M di g in [0; n] è data da:

$$M = \frac{\int_0^n g(x)dx}{n-0} = \frac{\frac{1}{2}n}{n} = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo ora la media di g nell'intervallo $\left[\mathbf{0}, \boldsymbol{n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$.

Osserviamo che l'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo [0; 3/2], quindi per **n=1**, è uguale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.
L'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo [0; 5/2], quindi per n=2, è uguale a $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{2} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.
In generale nell'intervallo $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$ l'area è uguale a:
$\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{n} + \frac{1}{8} = \frac{4n+1}{8} \quad (n = 1,2,3, \ldots)$.

Quindi:

$$\int_0^{n+\frac{1}{2}} g(x)dx = \frac{4n+1}{8}$$

Pertanto la media M' di g in $\left[0, n + \frac{1}{2}\right]$ è dato da:

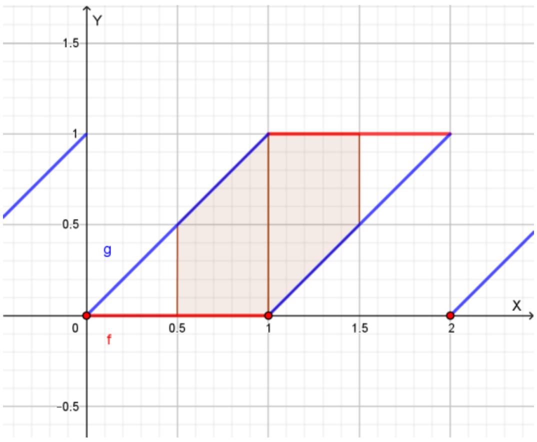
$$M' = \frac{\int_0^{n+\frac{1}{2}} g(x)dx}{n+\frac{1}{2}-0} = \frac{\frac{4n+1}{8}}{n+\frac{1}{2}} = \frac{4n+1}{8n+4}$$

Calcoliamo il limite a cui tende quest'ultima media per $\boldsymbol{n} \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{8n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{8n} = \frac{1}{2}$$

3)

Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\frac{\pi}{6}$ *radianti intorno all'asse x della regione di piano delimitata dai grafici di f e g nell'intervallo* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.



Ricordiamo che il volume del soldo di rotazione di un angolo α $(in\ radianti)$ intorno all'asse x della regione di piano compresa fra i grafici di due funzioni y=f(x) e y=g(x), con il grafico di f al di sopra del grafico di g, nell'intervallo [a; b] è dato da:

$$\boldsymbol{V_\alpha = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \cdot \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx}$$

Nel nostro caso il volume è:

$$V = \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\right) \cdot \pi \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} [x^2 - 0^2]\, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} [1^2 - (x-1)^2]\, dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} [2x - x^2]\, dx\right] = \frac{\pi}{12}\left[\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) + \left(\frac{9}{4} - \frac{27}{24} - 1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{12}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{16}\ u^3 \cong 0.196\ u^3 = V$$

4)

Stabilisci per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $h: R \to R$ definita dalla legge:

$$h(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$$

verifica le seguenti condizioni

$$\min g = \min h\ ,\quad \sup g = \max h\ ,\quad 2h'' + 2h - 1 = 0$$

(min=minimo, sup=estremo superiore, max=massimo).

Quante sono le funzioni siffatte?

Risulta: $\min g = 0 = \min h\ \ , \sup g = 1 = \max h$

Osserviamo che **non può essere b=0 né c=0**, altrimenti h sarebbe costante e quindi non può avere minimo 0 e massimo 1.

Siccome $-1 \leq sen(cx + d) \leq 1$, dovendo essere il mimino 0 ed il massimo 1 deve essere:

$$\begin{cases} a + b(1) = 1 \\ a + b(-1) = 0 \end{cases}\ ,\quad a = \frac{1}{2}\ \ e\ \ b = \frac{1}{2}\ \ :\ \ \boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sen(cx + d)}$$

Oppure:

$$\begin{cases} a + b(1) = 0 \\ a + b(-1) = 1 \end{cases}\ ,\quad a = \frac{1}{2}\ \ e\ \ b = -\frac{1}{2}\ \ :\ \ \boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} sen(cx + d)}$$

Osserviamo che non può essere c=0, altrimenti la funzione sarebbe costante e che d può assumere qualsiasi valore.
Al variare di c varia il periodo della funzione, al variare di d il grafico viene traslato orizzontalmente.

Imponiamo la terza condizione.

Primo caso: $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sen(cx + d)}$

Si ha: $h' = \frac{1}{2} c \cos(cx + d)\ ,\quad h'' = -\frac{1}{2} c^2 sen(cx + d)$ quindi sostituendo nell'ultima condizione:

$$-c^2 sen(cx + d) + 1 + sen(cx + d) - 1 = 0,\quad (1 - c^2)\, sen(cx + d) = 0\quad (*)$$

Essendo h una funzione continua e derivabile su tutto R, nel minimo e nel massimo la derivata prima si deve annullare, quindi:

$\frac{1}{2}c\cos(cx+d)=0$ da cui (essendo c diverso da 0):

$\cos(cx+d)=0$ quindi $sen(cx+d)=\pm 1$

Ma anche nel minimo e nel massimo deve valere la (*), e non potendo annullarsi $sen(cx+d)$ deve essere: $1-c^2=0,\ da\ cui\ \ c=\pm 1.$

Le funzioni richieste sono in questo caso INFINITE ed hanno equazioni del tipo:

$$h(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}sen(\pm x+d) \qquad (1)$$

Il periodo di tutte queste funzioni è 2π .

Secondo caso: $\boldsymbol{h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}sen(cx+d)}$

Si ha: $h'=-\frac{1}{2}c\cos(cx+d)$, $h''=\frac{1}{2}c^2sen(cx+d)$ quindi sostituendo nell'ultima condizione:

$c^2sen(cx+d)+1-sen(cx+d)-1=0, \quad (c^2-1)\,sen(cx+d)=0 \quad (**)$

Essendo h una funzione continua e derivabile su tutto R, nel minimo e nel massimo la

derivata prima si deve annullare, quindi:

$-\frac{1}{2}c\cos(cx+d)=0$ da cui (essendo c diverso da 0):

$\cos(cx+d)=0$ quindi $sen(cx+d)=\pm 1$

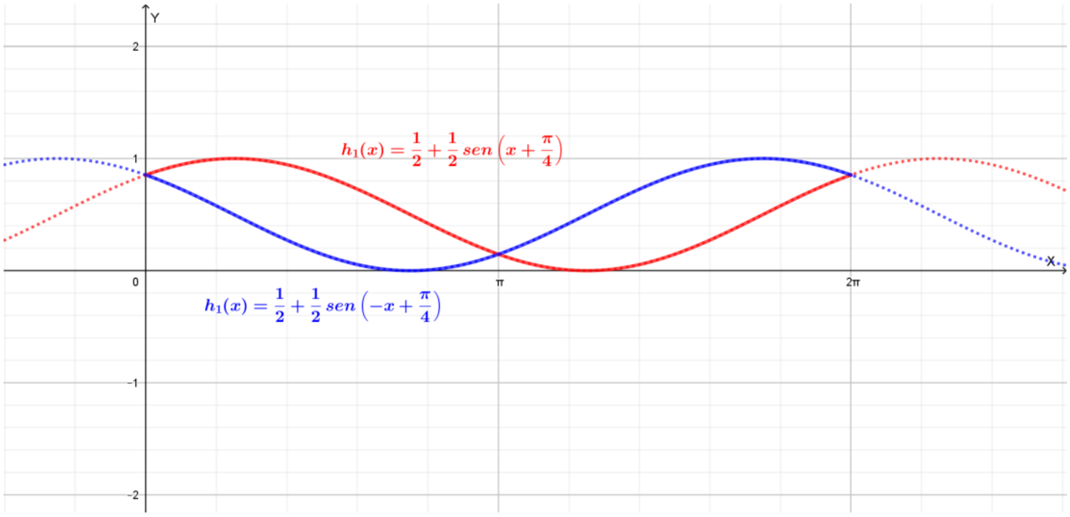
Ma anche nel minimo e nel massimo deve valere la (**), e non potendo annullarsi $sen(cx+d)$ deve essere: $c^2-1=0,\ da\ cui\ \ c=\pm 1.$

Le funzioni richieste sono anche in questo caso INFINITE ed hanno equazioni del tipo:

$$h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}sen(\pm x+d) \qquad (2)$$

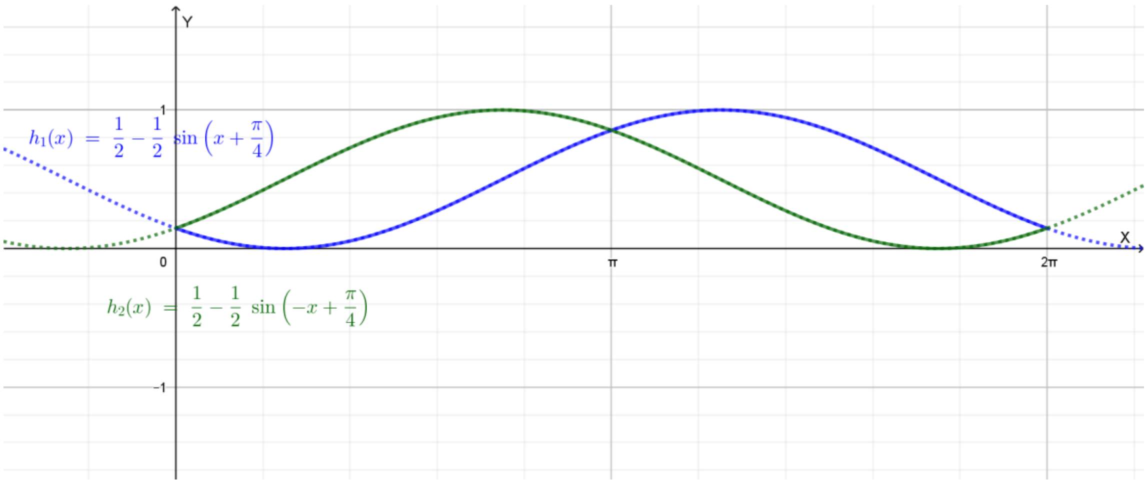
Il periodo di tutte queste funzioni è 2π .

Rappresentiamo come esempio le funzioni del tipo (1) che si ottengono per $d = \frac{\pi}{4}$ in $[0; 2\pi]$:



Rappresentiamo come esempio le funzioni del tipo (2) che si ottengono per $d = \frac{\pi}{4}$ in $[0; 2\pi]$:

Rappresentiamo come esempio le funzioni del tipo (1) che si ottengono per $d = \frac{\pi}{4}$ in $[0; 2\pi]$:



Con la collaborazione di Angela Santamaria