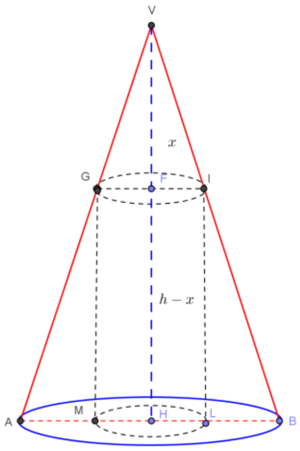
SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2018
QUESTIONARIO

QUESITO 1

Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.



Indichiamo con h ed r l'altezza ed il raggio di base del cono e cerchiamo il cilindro inscritto di volume massimo. Basterà dimostrare che tale volume è minore della metà del volume del cono.

Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$$V(cilindro) = \pi \cdot FG^2 \cdot (h - x)$$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x:

$$AH: FG = VH: VF\,, \quad r: FG = h: x, \;\; FG = \frac{x \cdot r}{h}$$

Quindi:

$$V(cilindro) = \pi \cdot \left(\frac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = x^2 \cdot (h - x), \quad con \;\; 0 \le x \le h$$

Metodo delle derivate:

$$y' = 2x(h - x) - x^2 \ge 0 \;\; se \;\; -3x^2 + 2hx \ge 0\,, \quad 0 \le x \le \frac{2}{3}h$$

La funzione è quindi crescente per $0 \le x < \frac{2}{3}h$ e decrescente per $\frac{2}{3}h < x \le h$: il volume pertanto è massimo quando $x = \frac{2}{3}h.$

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono. Pertanto il volume massimo del cilindro è:

$$V_{max} = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{4}{9}h^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{4}{27}\pi r^2 h$$

Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Deve essere:

$$\frac{4}{27}\pi r^2 h < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right), \qquad cioè \quad \frac{4}{27} < \frac{1}{6} \ : \quad vero.$$

Per via elementare:

Dobbiamo trovare il massimo di:

$$y = x^2 \cdot (h - x), \quad con \ \ 0 \le x \le h$$

Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: $a = x \ e \ b = h - x$.

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}$, $x = 2h - 2x$, $x = \frac{2}{3}h.$

QUESITO 2

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

Detta p=p(1) la probabilità che esca il 4 si ha: p(3)=2p(4)=2p, p(2)=2p(3)=4p, p(1)=2p(2)=8p, quindi, essendo la somma delle quattro probabilità uguale a 1, si ha:

$$p + 2p + 4p + 8p = 1, \quad p = \frac{1}{15} = p(4)$$

Quindi: $p(1) = \frac{8}{15}$, $p(2) = \frac{4}{15}$, $p(3) = \frac{2}{15}$, $p(4) = \frac{1}{15}$

La probabilità che escano due numeri uguali (1 e 1, 2 e 2, 3 e 3, 4 e 4) è data da:

$$p(1)p(1) + p(2)p(2) + p(3)p(3) + p(4)p(4) = \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 =$$

$$= \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \cong 0.378 = 37.8\%$$

QUESITO 3

Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ *sia tangente alla curva di equazione* $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Affinchè due curve di equazioni y=f(x) e y=g(x) siano tangenti deve essere:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} -4x + k = x^3 - 4x^2 + 5 \\ -4 = 3x^2 - 8x \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = 2\ e\ x = \frac{2}{3}$. Quindi, sostituendo nella prima equazione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ k = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ k = \frac{167}{27} \end{cases}$$

QUESITO 4

Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{sen\,x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$ *, determinare, se esistono, i valori di*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,,$$

giustificando adeguatamente le risposte fornite.

Per $x \to +\infty$ $e^{sen\,x}$ oscilla tra $e^{-1}\ ed\ e^{1}$ quindi il numeratore "si comporta" come 3x. Al denominatore: e^{-x} tende a 0, cos x oscilla tra -1 e 1, quindi il denominatore oscilla tra 4 e 6. Siccome il numeratore tende a +∞, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Per $x \to -\infty$ il numeratore si comporta ancora come $3x$ ed il denominatore come e^{-x} (che tende a + infinito), dato che $5 - \cos x$ oscilla ancora fra 4 e 6; si ha quindi:

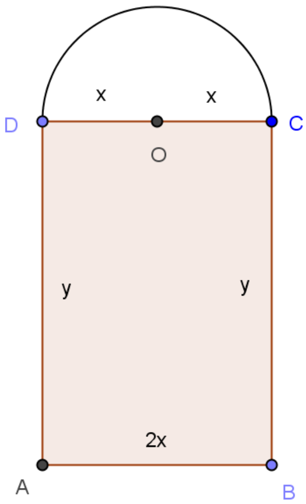
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = 0^{-}$$

(ricordiamo che l'infinito dell'esponenziale è di ordine superiore rispetto all'infinito della potenza)

QUESITO 5

Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.



Indicato con 2x il lato del rettangolo che coincide con il diametro della semicirconferenza e con y la misura dell'altro lato del rettangolo, osservando che la staccionata è formata dai lati AD, AB e BC del rettangolo e dalla semicirconferenza di diametro CD (senza diametro), si ha:

$$2x + 2y + \pi x = 1$$

Da cui: $y = 1 - x - \frac{\pi x}{2}$

Limitiamo la x:

Se x=0 si ha 2y=2. Quindi y=1.

Se y=0 deve essere $2x + \pi x = 2,\ x = \frac{2}{2+\pi}$

Risulta quindi: $0 \le x \le \frac{2}{2+\pi}$

L'area della superficie da recintare è data da:

$$Area = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = 2x\left(1 - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$Area = 2x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right)x^2 + 2x = z$$

La funzione da ottimizzare è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha nel vertice (se incluso nelle limitazioni della x):

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4+\pi} < \frac{2}{2+\pi} \quad quindi\ accettabile.$$

Ovviamente si arriva allo stesso risultato derivando z:

$$z' = 2x\left(-2 - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \geq 0 \;\; se \;\; x \leq \frac{2}{4+\pi}$$

Quindi z cresce per $0 < x < \frac{2}{4+\pi}$ e decresce per $\frac{2}{4+\pi} < x < \frac{2}{2+\pi}$ ed è pertanto massima per $x = \frac{2}{4+\pi}$

L'area massima (non richiesta) risulta:

$$Area(massima) = \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{2}{4+\pi}\right)^2 + \frac{4}{4+\pi} = -\frac{1}{2}(4+\pi)\frac{4}{(4+\pi)^2} + \frac{4}{4+\pi} = \frac{2}{(4+\pi)}$$

Il lati del rettangolo che consentono di recintare l'area massima valgono:

$$AB = 2x = \frac{4}{4+\pi} \;\; , \;\; BC = y = 1 - x - \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{4+\pi}$$

Osserviamo che la base è il doppio dell'altezza.

QUESITO 6

Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx$$

Sia uguale a 10.

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = [x^3 + 3x]_a^{a+1} = (a+1)^3 + 3(a+1) - a^3 - 3a = 10$$

$$a^2 + a - 2 = 0, \;\; a = 1 \;\; e \;\; a = -2$$

QUESITO 7

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Le partite possono essere n=10, n=11 oppure n=12.

Per n=10 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità che uno dei due le vinca tutte. Quindi, essendo $\frac{1}{2}$ la probabilità che uno dei due vinca, si ha:

$$p(10,10) = \binom{10}{10} p^{10} q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 10 partite è:

$$p(10) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^9}$$

Per n=11 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità di avere l'esito 10 a 1 , cioè alla probabilità di avere 10 successi in 11 prove ripetute con probabilità del successo pari ad ½ (distribuzione binomiale) meno la probabilità che si vincano le prime 10 partite su 11. Quindi la probabilità che uno dei due vinca in 11 partite è:

$$p(10,11) = \binom{11}{10} p^{10} q^1 = 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{11}{2^{11}}$$

La probabilità che si vincano le prime 10 su 11 è uguale a: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2^{11}}$

Quindi la probabilità che uno dei vinca 10 a 1 è: $\frac{11}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}} = \frac{10}{2^{11}}$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 11 partite è:

$$p(11) = 2 \cdot \frac{10}{2^{11}} = \frac{5}{2^9}$$

Per n=12 la probabilità che vinca uno dei due equivale alla probabilità di avere l'esito 10 a 2 cioè alla probabilità di avere 9 successi nelle prime 11 e vincere la dodicesima. Quindi la probabilità che uno dei due vinca in 12 partite è:

$$p(9,11) \cdot \frac{1}{2} = \left[\binom{11}{9} p^9 q^2\right] \cdot \frac{1}{2} = 55 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{55}{2^{12}}$$

Potendo vincere sia l'uno che l'altro, la probabilità che uno o l'altro vinca in 12 partite è:

$$p(12) = 2 \cdot \frac{55}{2^{12}} = \frac{55}{2^{11}}$$

Quindi la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12 è:

$$p(10) + p(11) + p(12) = \frac{1}{2^9} + \frac{5}{2^9} + \frac{55}{2^{11}} = \frac{79}{2^{11}} = \frac{79}{2048} \cong 0.039 = 3.9\ \%$$

QUESITO 8

Determinare quali sono i valori del parametro $k \in R$ *per cui la funzione* $y(x) = 2\, e^{kx+2}$ *è soluzione dell'equazione differenziale* $y'' - 2y' - 3y = 0$ **.**

Si ha: $y' = 2ke^{kx+2}$, $y'' = 2k^2 e^{kx+2}$ quindi:

$$2k^2 e^{kx+2} - 4ke^{kx+2} - 6e^{kx+2} = 0, \;\; 2k^2 - 4k - 6 = 0 \;\; (e^{kx+2} \text{ è } diverso\ da\ zero)$$

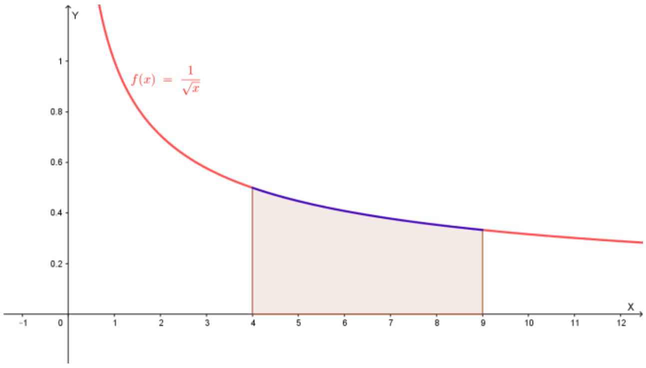
$$k^2 - 2k - 3 = 0 \; : \quad k = 3, \qquad k = -1$$

QUESITO 9

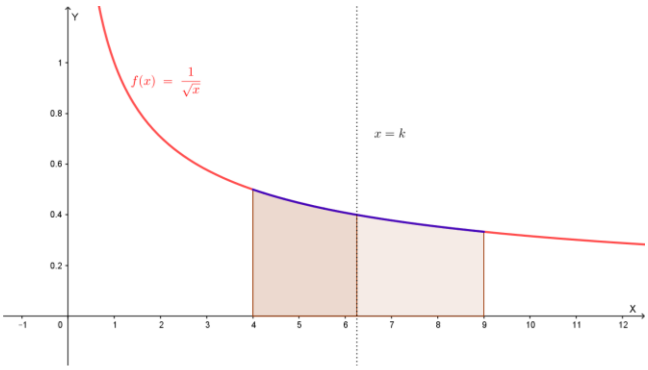
Trovare l'area R della regione di spazio racchiusa dalla curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\ , \quad per\ 4 \le x \le 9$$

Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k.



$$Area(R) = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_4^9 = 2(3-2) = 2\ u^2 = Area(R)$$



Deve essere:

$$\int_4^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1\ , \quad 2\left[\sqrt{x}\right]_4^k = 1, \ \ 2\left(\sqrt{k} - 2\right) = 1\ , \qquad 2\sqrt{k} = 5, \qquad k = \frac{25}{4}$$

QUESITO 10

Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k, la funzione $y = ke^{-x}\,sen(x + \varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate (0,1).

Si ha:

$y' = -ke^{-x}\, sen(x+\varphi) + \; ke^{-x}\, cos(x+\varphi) = ke^{-x}[cos(x+\varphi) - sen(x+\varphi)]$

$y'' = -ke^{-x}[cos(x+\varphi) - sen(x+\varphi)] + ke^{-x}[-sen(x+\varphi) - cos(x+\varphi)] =$

$= -ke^{-x}[cos(x+\varphi) - sen(x+\varphi) + sen(x+\varphi) + cos(x+\varphi)] = -2ke^{-x}cos(x+\varphi)$

Sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo:

$$-2ke^{-x}cos(x+\varphi) + 2ke^{-x}[cos(x+\varphi) - sen(x+\varphi)] + 2ke^{-x}\, sen(x+\varphi) = 0$$

$0 = 0$: quindi la funzione data è soluzione per ogni k e per ogni φ

$\boldsymbol{y = ke^{-x}\, sen(x+\varphi)}$

Se in (0; 1) c'è un massimo deve essere: $y(0) = 1 \;\; e \;\; y'(0) = 0\,, \;\; y''(0) < 0.$

$y(0) = k\; sen(\varphi) = 1\;\;, \qquad y'(0) = k\big(cos(\varphi) - sen(\varphi)\big) = 0,\;\; y''(0) = -2kcos(\varphi) < 0$

Dalla seconda relazione, non potendo essere k=0 (altrimenti non varrebbe la prima relazione), ricaviamo: $cos(\varphi) - sen(\varphi) = 0,\;\; cos(\varphi) = sen(\varphi)$. Quindi:

$$\begin{cases} k\; sen(\varphi) = 1 \\ cos(\varphi) = sen(\varphi):\;\; \varphi = \dfrac{\pi}{4} + h\pi \end{cases};\; \begin{cases} k\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1\,, \qquad k = \sqrt{2} \\ \qquad se\; h\; pari \end{cases},\; \begin{cases} k\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1\,, \qquad k = -\sqrt{2} \\ \qquad se\; h\; dispari \end{cases}$$

Tali coppie di valori soddisfano entrambe la condizione $y''(0) = -2kcos(\varphi) < 0$

Quindi, per esempio: $\varphi = \frac{\pi}{4} \;\; e \;\; k = \sqrt{2} \;\; oppure \;\; \varphi = \frac{5}{4}\pi \;\; e \;\; k = -\sqrt{2}$
In corrispondenza di questi valori abbiamo le funzioni:

$y = \sqrt{2}\, e^{-x}\, sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = f(x) \;\;\; e$

$y = g(x) = -\sqrt{2}\, e^{-x}\, sen\left(x + \dfrac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}\, e^{-x} sen\left(\pi - x - \dfrac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}\, e^{-x} sen\left(-\dfrac{\pi}{4} - x\right) =$

$= \sqrt{2}\, e^{-x} sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x).$

Quindi $k = \sqrt{2} \quad e \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad e\; si\; ha \quad y = \sqrt{2}\, e^{-x}\, sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Con la collaborazione di Angela Santamaria