LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2018 QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $\frac{k}{2}$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.

Deve risultare: $4(k)+2\left(\frac{k}{2}\right)=1$, $quindi$: $5k=1$: $k=\frac{1}{5}$.

Lanciando i due dadi contemporaneamente, la probabilità che escano due numeri uguali è:

$$p(1,1)+p(2,2)+p(3,3)+p(4,4)+p(5,5)+p(6,6)=4p(1,1)+2p(5,5)=$$

$$=4(k)(k)+2\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right)=4k^2+\frac{1}{2}k^2=\frac{9}{2}k^2=\frac{9}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2=9/50=0{,}18=18\%$$

QUESITO 2

Determinare il raggio della sfera di centro $C(2,2,2)$ tangente al piano di equazione:

$$x+2y+z=12$$

Il raggio della sfera non è altro che la distanza del suo centro dal piano tangente, quindi, applicando la formula della distanza punto-piano:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2+4+2-12|}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=raggio\ sfera\ tangente$$

QUESITO 3

Considerando la funzione $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definita come:

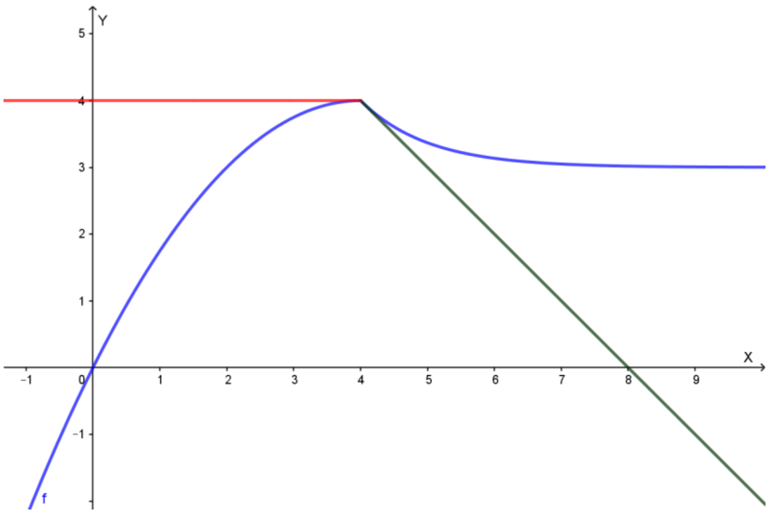
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{4}+2x\,, & per\ \ x<4\\ e^{4-x}+3\,, & per\ x\geq 4\end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

Per $x < 4$ si ha: $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2,\ quindi\!: \ f'_-(4) = 0.$

Per $x > 4$ si ha: $f'(x) = -e^{4-x},\ quindi\!: \ f'_+(4) = -1$.

Detto α l'angolo fra le due semi tangenti si ha: $tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-1}{1} = -1,\ \ \alpha = 135°$.



QUESITO 4

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot sen(x)$, *adoperando la definizione di derivata.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)sen(x+h) - x\,sen(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(sen(x)\cos(h) + sen(h)\cos(x)) - x\,sen(x)}{h} =$$

$$=$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xsen(x)\cos(h) + xsen(h)\cos(x) + hsen(x)\cos(h) + hsen(h)\cos(x) - x\,sen(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xsen(x)[\cos(h) - 1] + xsen(h)\cos(x) + hsen(x)\cos(h) + hsen(h)\cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{xsen(x)[\cos(h) - 1]}{h} + \frac{xsen(h)\cos(x)}{h} + \frac{hsen(x)\cos(h)}{h} + \frac{hsen(h)\cos(x)}{h} \right] =$$

$$= xsen(x) \cdot 0 + xcos(x) \cdot 1 + sen(x) + 0 = x\cos(x) + sen(x) = f'(x)$$

QUESITO 5

Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

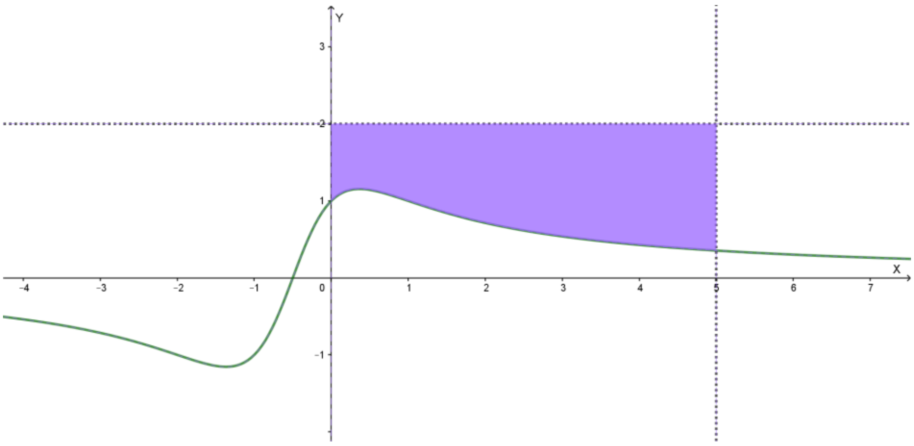
le rette $y = 2,\ \ x = 5$ *e l'asse* y.

Osserviamo che la funzione per $0 < x < 5$ è positiva ed è < 2, poiché:

$$\frac{2x+1}{x^2+x+1} < 2,\ \ 2x+2 < 2x^2+2x+2,\ \ 0 < 2x^2 \quad sempre\ se\ 0 < x < 5.$$

Quindi l'area richiesta è data da:

$$\int_0^5 \left[2 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right] dx = [2x - \ln|x^2+x+1|]_0^5 = 10 - \ln(31)\ \ u^2 \cong 6.57\, u^2$$



QUESITO 6

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \cdot e^{-x}$ *nel suo punto di flesso.*

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}\,,\ \ f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x} = e^{-x}(x-2) \geq 0\ \ x \geq 2$$

Quindi x=2 è il punto di flesso: $F = (2;\ 2e^{-2})$. La tangente nel flesso è:

$$y - 2e^{-2} = f'(2)(x-2),\ \ y - 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2):\ \ y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$$

QUESITO 7

La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & per\ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ \frac{7}{12} & per\ \ x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{2} & per\ \ x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \end{cases}$$

determinare la media e la mediana della variabile casuale x *.*

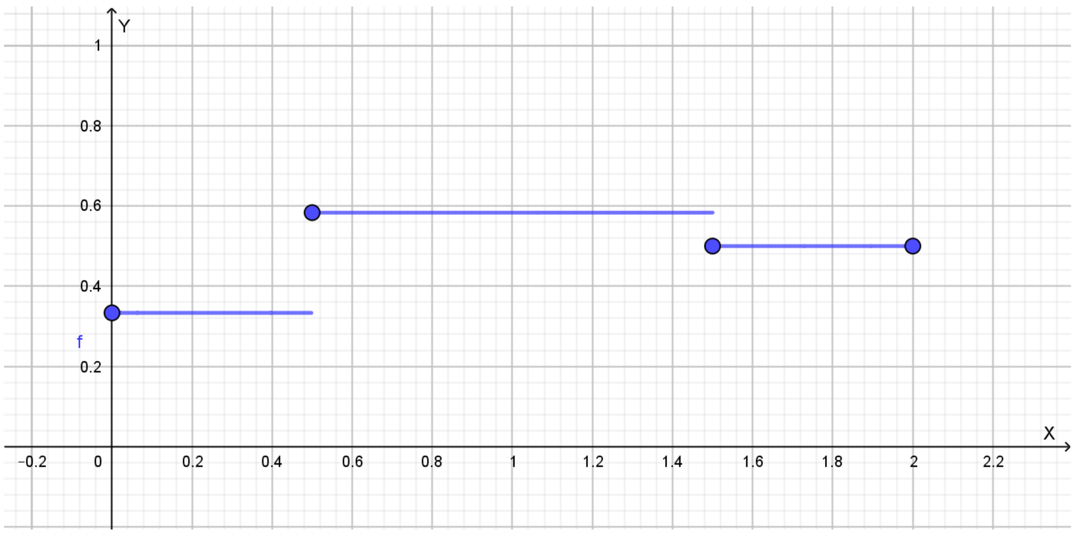
Osserviamo che, affinché f rappresenti una densità di probabilità deve essere non negativa e:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1$$

La funzione è chiaramente non negativa e si verifica facilmente che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{7}{12} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

Il grafico della funzione è il seguente:



La media M è data da:

$$M=\int_a^b x\,f(x)\,dx=\int_0^2 x\,f(x)\,dx=\int_0^{1/2} x\,\left(\frac{1}{3}\right)dx+\int_{1/2}^{3/2} x\cdot\frac{7}{12}dx+\int_{3/2}^{2} x\cdot\frac{1}{2}dx=$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^{1/2}+\left[\frac{7}{24}x^2\right]_{1/2}^{3/2}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{3/2}^{2}=\frac{1}{24}+\frac{7}{24}(2)+\frac{1}{4}\left(4-\frac{9}{4}\right)=\frac{17}{16}\cong 1.06=M$$

La mediana M_e (cioè la mediana) è quel punto c tale che:

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

Osserviamo che:

$\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{6},\quad \int_{1/2}^{3/2}\left(\frac{7}{12}\right)dx=\frac{7}{12}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12},\ \ \frac{1}{6}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ quindi il punto c è

compreso fra ½ e 3/2 ed è tale che:

$$\frac{1}{6}+\left(c-\frac{1}{2}\right)\frac{7}{12}=\frac{1}{2}\,,\quad da\ cui\quad c=\frac{15}{14}\cong 1.07=M_e$$

QUESITO 8

Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $[1,1,1]$ al piano di equazione $2x-y-z=0$, a distanza 6 da tale piano.

La retta passante per (1, 1, 1) e perpendicolare al piano dato ha parametri direttori uguali ai coefficienti di x, y e z dell'equazione del piano (parametri direttori di una normale al piano): $a=2,\ b=-1,\ c=-1$.

La retta in forma parametrica è quindi:

$$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\quad;\quad\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$$

Il generico punto P di tale retta ha quindi coordinate $P=(1+2t,1-t,1-t)$. Imponiamo che la distanza di P dal piano dato valga 6:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2+4t-1+t-1+t|}{\sqrt{6}}=\frac{|6t|}{\sqrt{6}}=6:\ \ t=\pm\sqrt{6}$$

I punti richiesti sono quindi due:

$$P_1=\left(1+2\sqrt{6};1-\sqrt{6};1-\sqrt{6}\right)\ e\ P_2=\left(1-2\sqrt{6};1+\sqrt{5};1+\sqrt{6}\right)$$

QUESITO 9

Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax+1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ *e a valori in* $\mathbb{R}$*, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro* a*. Individuare inoltre il valore minimo del parametro* a *per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area* ***maggiore*** *di 3.* ***(n.d.r. forse si intendeva uguale a 3)***

Calcoliamo la derivata prima di $f(x) = \frac{ax+1}{x} = a + \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ed\ è\ f'(1) = f'(-1) = -1\ per\ ogni\ a$$

Il coefficiente angolare delle tangenti nei punti di ascissa 1 e -1 è $f'(1) = f'(-1) = -1$
Quindi tali tangenti sono parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Il punto di ascissa 1 è $A = (1; a+1)$. La tangente in tale punto ha equazione:

$y - a - 1 = -1(x-1), \quad y = -x + a + 2.$ Le intersezioni di tale retta con gli assi cartesiani sono:

$$x = 0, \ \ y = a+2: \ \ B = (0; a+2)$$
$$y = 0, \quad \ x = a+2: \ \ C = (a+2; 0).$$

Il triangolo formato dalla tangente con gli assi cartesiani ha quindi area:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}(a+2)^2$$

$\frac{1}{2}(a+2)^2 > 3, \ \ (a+2)^2 > 6, \ \ a+2 < -\sqrt{6} \ \ vel \ \ a+2 > \sqrt{6}$ da cui:

$$a < -2 - \sqrt{6} \ \ vel \ \ a > -2 + \sqrt{6}$$

L'area di ABC è uguale a 3 se: $a = -2 - \sqrt{6} \ \ vel \ \ a = -2 + \sqrt{6}$

Il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area **uguale a 3 è $a = -2 - \sqrt{6}$.**
Non esiste il minimo di a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area **maggiore di 3.**

QUESITO 10

Dimostrare che la derivata della funzione $f(x) = e^{ax}$ *è la funzione* $f'(x) = a \cdot e^{ax}$.

Utilizzando la definizione di derivata si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{ax}(e^{ah} - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(e^{ah} - 1)}{ah}\right] \cdot a \cdot e^{ax} = 1 \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot e^{ax}$$

(Abbiamo usato il limite notevole $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$).

Con la collaborazione di Angela Santamaria