SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA
SESSIONE STRAORDINARIA 2018

PROBLEMA 1

Due archi illimitati di due parabole (con assi paralleli all'asse y di un sistema di riferimento), ciascuno dei quali contenente il vertice della parabola, sono disposti in modo da passare per tutti e quattro i quadranti del piano e raccordarsi nell'origine, formando il grafico Γ di una funzione:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & se \;\; x < 0 \\ f_2(x) & se \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

che è derivabile in R. La figura 1 sottostante ne fornisce un possibile esempio.

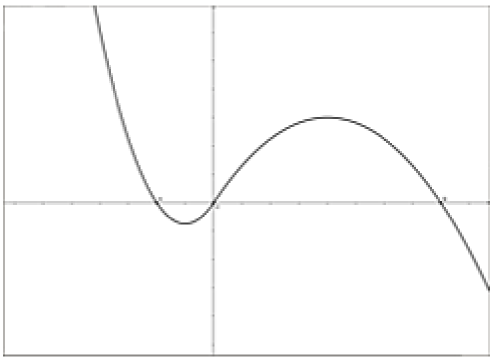


Figura 1

Il grafico Γ interseca l'asse x nell'origine O e nei punti A di ascissa $x_A < 0$ e B di ascissa $x_B > 0$.

1)

Dimostra che, se la funzione f soddisfa le richieste precedenti, si ha:

$$f_1(x) = ax^2 + bx \quad , \quad f_2(x) = cx^2 + bx$$

dove a, b, c sono opportuni coefficienti reali non nulli. Dimostra che le rette tangenti a Γ in A e in B sono parallele.

Le due parabole passano per l'origine, quindi le loro equazioni mancano del termine noto.

Il punto A ha coordinate $A = \left(-\frac{b}{a};0\right), quindi\ \ x_A = -\frac{b}{a} < 0, quindi\ \ \frac{b}{a} > 0\ \ da\ cui$ $b > 0,$ poiché, essendo la concavità della parabola di sinistra rivolta verso l'alto, è $a > 0$.

Il punto B ha coordinate $B = \left(-\frac{b}{c};0\right), con\ \ x_B = -\frac{b}{c} > 0, quindi\ \ \frac{b}{c} < 0\ \ da\ cui,$ essendo la concavità della parabola di destra rivolta verso il basso, è $c < 0\ \ e\ \ b > 0$.

Poiché la funzione f deve essere derivabile nell'origine, indicati con $b_1\ e\ \ b_2$ i coefficienti di x nelle equazioni di $f_1\ \ ed\ \ f_2$ deve essere:

$(f_1{}')_-(0) = (f_2{}')_+(0), da\ cui:\quad (2ax + b_1)_0 = (2cx + b_2)_0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = b$

Quindi è verificato che $f_1(x) = ax^2 + bx\ \ ,\ \ f_2(x) = cx^2 + bx,\ con\ \ a > 0, b > 0, c < 0$.

La tangente a Γ in A ha coefficiente angolare $m_A = f_1'\left(-\frac{b}{a}\right) = -2b + b = -b$.
La tangente a Γ in B ha coefficiente angolare $m_B = f_2'\left(-\frac{b}{c}\right) = -2b + b = -b$.

Le rette tangenti a Γ in A e in B sono quindi parallele.

2)

Considerando le funzioni $g(x) = f'(x)$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ mostra, con le opportune argomentazioni, che il grafico di g è costituito da due semirette che intersecano l'asse x nei punti di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$ e che il grafico di F ha due punti stazionari di ascisse x_A e x_B e due punti di flesso di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$.

Se $x < 0\quad g(x) = f_1'(x) = 2ax + b$
Se $x > 0\quad g(x) = f_2'(x) = 2cx + b$
Se $x = 0\quad g(x) = b$

Quindi:

$$g(x) = \begin{cases} 2ax + b & se\ \ x < 0 \\ b & se\ \ x = 0 \\ 2cx + b & se\ \ x > 0 \end{cases} \quad :\ che\ sono\ due\ semirette\ uscenti\ dal\ punto\ (0; b)$$

Se $y = 0$ si ha: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_A}{2}\ \ e\ \ x = -\frac{b}{2c} = \frac{x_B}{2}$.

N.B.

Allo stesso risultato si può pervenire graficamente osservando che, essendo la f formata da due parabole (quindi funzioni quadratiche), la sua derivata sarà formata da due rette (funzioni lineari); siccome la derivata della f è nulla nei vertici (punti a tangenti orizzontali) e tali vertici hanno ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$, possiamo concludere che il grafico di g è costituito da due semirette che intersecano l'asse x nei punti di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$.

Analizziamo ora la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Essendo F continua e derivabile con derivata uguale ad f(x): $F'(x) = f(x)$ (per il teorema fondamentale del calcolo integrale), risulta $F'(x) = 0 \;\; dove \;\; f(x) = 0, \;\; quindi \;\; per \;\; x = x_A \;\; e \;\; x = x_B$:

il grafico di F ha due punti stazionari di ascisse x_A e x_B.

Per determinare i flessi di F studiamo il segno della derivata seconda:

$F''(x) = f'(x) > 0 \;\; (f \; crescente) \;\; se \;\; \frac{x_A}{2} < x < \frac{x_B}{2}: grafico \; di \; F \; con \; concavità \; verso \; l'alto$
$F''(x) = f'(x) < 0 \;\; (f \; decrescente) \;\; se \;\; x < \dfrac{x_A}{2} \;\; vel \; x > \dfrac{x_B}{2}:$
$grafico \; di \; F \; con \; concavità \; verso \; l'alto.$

Quindi F ha due punti di flesso di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$

3)

Determina le espressioni di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in modo tale che la retta tangente a Γ nel punto A abbia equazione $y = -2x - 8$ e l'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ sia pari a 9 volte quella dell'analoga superficie contenuta nel semipiano $x < 0$.

Affinché $f_1(x)$ abbia tangente in A di equazione $y = -2x - 8$ deve essere:

$m_A = f_1'\left(-\frac{b}{a}\right) = -b = -2, \;\; quindi \;\; b = 2$.

Siccome la retta passa per $A = \left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, deve essere: $0 = -2\left(-\frac{b}{a}\right) - 8$,

$\frac{b}{a} = 4, \;\; a = \frac{b}{4} = \frac{1}{2}$

Quindi: $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

L'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x < 0$ è :

$$-\int_{x_A}^{0} f_1(x)\,dx = -\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)dx = -\left[\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_{-4}^{0} = -\left(\frac{32}{3} - 16\right) = \frac{16}{3}$$

L'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ è :

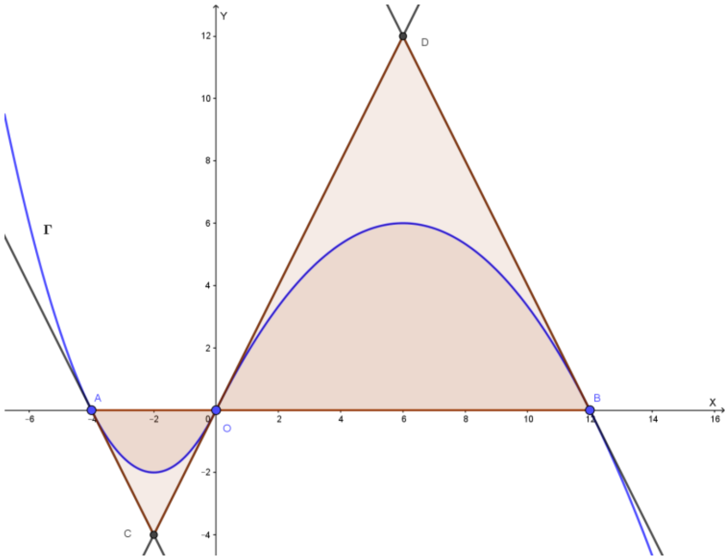
$$\int_0^{x_B} f_2(x)\,dx = \int_0^{-\frac{2}{c}}(cx^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{3}cx^3 + x^2\right]_0^{-\frac{2}{c}} = \frac{1}{3}c\left(-\frac{8}{c^3}\right) + \frac{4}{c^2} = -\frac{8}{3c^2} + \frac{4}{c^2} = \frac{4}{3c^2}$$

Affinché l'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $\mathrm{x} > 0$ sia pari a 9 volte quella dell'analoga superficie contenuta nel semipiano $\mathrm{x} < 0$ deve essere:

$\int_0^{x_B} f_2(x)\,dx = 9\left(-\int_{x_A}^0 f_1(x)\,dx\right)$, $\frac{4}{3c^2} = 9\left(\frac{16}{3}\right)$, $c^2 = \frac{1}{36}$, $c = -\frac{1}{6}$ (ricordiamo che $c < 0$).

Quindi: $f_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2x$

Osserviamo che le aree delle due superfici (segmenti parabolici) potrebbero essere calcolate anche mediante il teorema di Archimede.



4)

Dimostra che anche il rapporto tra le aree dei triangoli formati dalle rette tangenti al grafico Γ nei punti A, O e B e l'asse delle ascisse è pari a 9.

Osserviamo che i due triangoli AOC e BOD sono simili per il terzo criterio di similitudine essendo congruenti gli angoli ACO e BDO (alterni interni nelle parallele AC e BD con la trasversale CD) e gli angoli OAC e OBD (alterni interni nelle parallele AC e BD con la trasversale AB).

$A = (-4; 0)$ e $B = (12; 0)$.

Il rapporto di similitudine è $k = \frac{OB}{OA} = \frac{12}{4} = 3$. Il rapporto fra le aree è $k^2 = 3^2 = 9$.
Quindi:

$$Area(OBD) = 9Area(OAC).$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria