Sessione straordinaria 2018
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Due archi illimitati di due parabole (con assi paralleli all'asse *y* di un sistema di riferimento), ciascuno dei quali contenente il vertice della parabola, sono disposti in modo da passare per tutti e quattro i quadranti del piano e raccordarsi nell'origine, formando il grafico Γ di una funzione:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & se\ x < 0 \\ f_2(x) & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

che è derivabile in R. La figura 1 sottostante ne fornisce un possibile esempio.

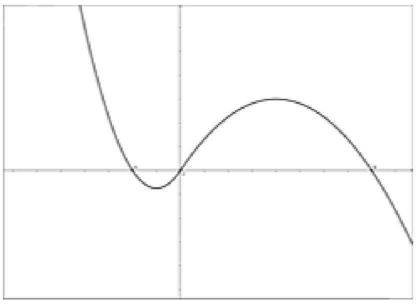

Figura 1

Il grafico Γ interseca l'asse x nell'origine O e nei punti A di ascissa $x_A < 0$ e B di ascissa $x_B > 0$.

1) Dimostra che, se la funzione f soddisfa le richieste precedenti, si ha:

$$f_1(x) = ax^2 + bx$$
$$f_2(x) = cx^2 + bx$$

dove a, b, c sono opportuni coefficienti reali non nulli. Dimostra che le rette tangenti a Γ in A e in B sono parallele.

2) Considerando le funzioni

$$g(x) = f'(x)$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,;$$

mostra, con le opportune argomentazioni, che il grafico di g è costituito da due semirette che intersecano l'asse x nei punti di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$ e che il grafico di F ha due punti stazionari di ascisse x_A e x_B e due punti di flesso di ascisse $\frac{x_A}{2}$ e $\frac{x_B}{2}$.

3) Determina le espressioni di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in modo tale che la retta tangente a Γ nel punto A abbia equazione $y = -2x - 8$ e l'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ sia pari a 9 volte quella dell'analoga superficie contenuta nel semipiano $x < 0$.

4) Dimostra che anche il rapporto tra le aree dei triangoli formati dalle rette tangenti al grafico Γ nei punti A, O e B e l'asse delle ascisse è pari a 9.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f : \Re \to \Re$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a,b,c parametri reali positivi.

1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re, \ \ f''(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re.$$

2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina a,b,c in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.

3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \ \ \forall x \in \Re.$$

4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S$$

QUESTIONARIO

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $k/2$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.

2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2, 2, 2)$ tangente al piano di equazione:
$$x + 2y + z = 12.$$

3. Considerando la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x, & per\ x < 4 \\ e^{4-x} + 3, & per\ x \geq 4 \end{cases}$$
determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot sen(x)$, adoperando la definizione di derivata.

5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:
$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$
le rette $y = 2,\ x = 5$ e l'asse y.

6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:
$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$
nel suo punto di flesso.

7. La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & per\ x \in [0, 1/2] \\ \frac{7}{12} & per\ x \in [1/2, 3/2] \\ \frac{1}{2} & per\ x \in [3/2, 2] \end{cases};$$
determinare la media e la mediana della variabile casuale x.

8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $[1, 1, 1]$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

9. Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a. Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.

10. Dimostrare che la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.