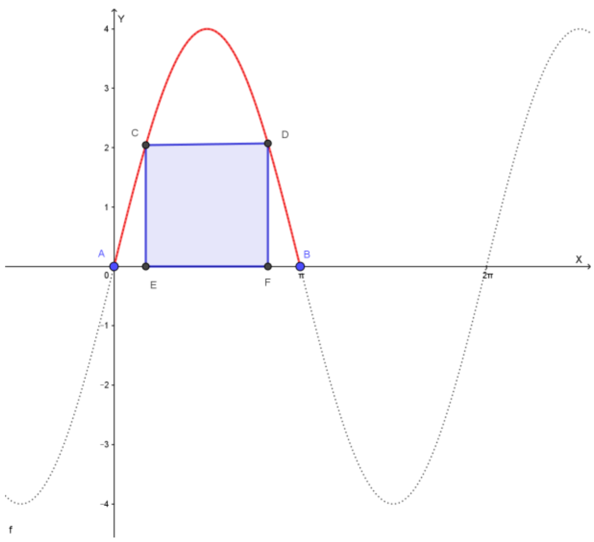
SESSIONE SUPPLETIVA 2018 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

$$A=(0;0)\ e\ B=(\pi;0)\ ;\ \ y=4\,sen(x)\ \ con\ \ 0\leq x\leq \pi$$

Rappresentiamo la regione R ed un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB:



Indichiamo con EF il lato contenuto in AB e poniamo $E=(x;0),\ \ con\ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$.
L'altro vertice F su AB è simmetrico di E rispetto alla retta $x=\frac{\pi}{2}$, quindi la sua ascissa è:

$$x_F=2\left(\frac{\pi}{2}\right)-x_E=\pi-x$$

L'ordinata del punto C è $4\,sen(x)$. Il perimetro del rettangolo è perciò:

$$2p=2EF+2CE=2(x_F-x_E)+2y_C=2(\pi-2x)+8sen(x)$$

Il perimetro è massimo se lo è la funzione:

$$y=\pi-2x+4sen(x),\ \ con\ \ \ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$$

Risulta: $y'=-2+4\cos(x)\geq 0\ \ se\ \ \cos(x)\geq \frac{1}{2}\ :\ \ 0\leq x\leq \frac{\pi}{3}$
Quindi la funzione è crescente in $0\leq x<\frac{\pi}{3}$ e decrescente in $\frac{\pi}{3}<x\leq \frac{\pi}{2}$, risulta quindi massima in $x=\frac{\pi}{3}$. Il massimo perimetro è quindi: $2p\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$.

QUESITO 2

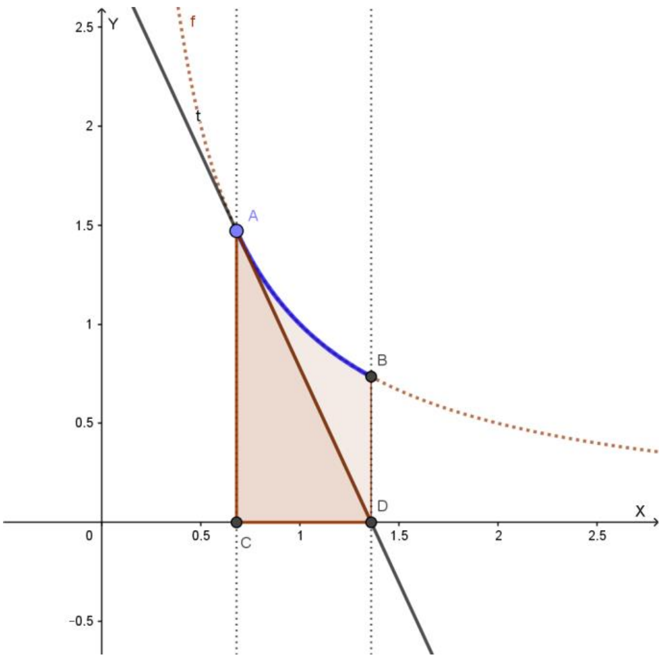
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad con \quad p \le x \le 2p$$

Determiniamo la tangente t al grafico Γ della funzione nel suo punto A di ascissa p.

Si ha: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ quindi la tangente t ha equazione:

$$y - f(p) = f'(p)(x-p), \quad y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x-p), \quad y = -\frac{1}{p^2}\,x + \frac{2}{p}$$

Rappresentiamo graficamente la funzione e la tangente in questione supponendo p>0:



Osserviamo che la retta t taglia l'asse delle x nel punto D di ascissa 2p.

Le due aree sono:

$$A_1 = Area(triangolo\ ACD) = \frac{CD \cdot AC}{2} = \frac{1}{2}(2p-p)\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}$$

La seconda area possiamo calcolarla nel modo seguente:

$$A_2 = \int_p^{2p} \frac{1}{x}\,dx - A_1 = [\ln|x|]_p^{2p} - \frac{1}{2} = \ln(2p) - \ln(p) - \frac{1}{2} = ln2 - \frac{1}{2}$$

QUESITO 3

$$C = (1;\ -1; 2), \quad x - y + z = 10$$

Il raggio della sfera è uguale alla distanza del centro C dal piano tangente:

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 2 - 10|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

La sfera ha quindi equazione:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 12$$

Il punto di tangenza si ottiene intersecando la normale n al piano tangente passante per C; tale retta ha gli stessi parametri direttori del piano: $1, -1, 1$. Quindi:

$$n: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del piano:

$$1 + t - (-1 - t) + 2 + t = 10\ , \qquad 3t = 6\ ,\ \ t = 2$$

Il punto di tangenza è quindi: $T = (3;\ -3; 4)$.

QUESITO 4

Calcoliamo utilizzando il metodo per parti il seguente integrale indefinito (n>1)

$$\int \cos^n(x)dx = \int \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)dx = \int \left(sen(x)\right)' \cdot \cos^{n-1}(x)dx =$$

$$= sen(x) \cdot \cos^{n-1}(x) - \int sen(x)\left[(n-1)cos^{n-2}(x)\left(-sen(x)\right)\right] dx =$$

$$= sen(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + (n-1)\int sen^2(x)cos^{n-2}(x)\, dx =$$

$$= sen(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + (n-1)\int (1 - \cos^2 x)cos^{n-2}(x)\, dx =$$

$$= sen(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2}(x)\, dx - (n-1)\int \cos^n(x)dx$$

Quindi, portando a sinistra l'ultimo termine:

$$n\int \cos^n(x)dx = sen(x) \cdot \cos^{n-1}(x) + (n-1)\int cos^{n-2}(x)\, dx$$

E passando agli integrali definiti:

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)dx = [sen(x)\cdot\cos^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n-2}(x)dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n-2}(x)dx \ , \quad quindi:$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)dx = \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n-2}(x)dx$$

Calcoliamo ora $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(x)dx$ sfruttando la proprietà dimostrata:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\right] = \frac{3}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi$$

QUESITO 5

La probabilità che non esca il 3 in un lancio (successo) è p=5/6. La probabilità che non esca mail il 3 in n lanci è:

$$p^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Deve essere:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{0.01}{100}\,, \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-4}\,, \quad ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < ln10^{-4} \ , \qquad n\ ln\left(\frac{5}{6}\right) < -4\ ln10$$

Ed essendo $ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$, si ha:

$$n > \frac{-4\ln 10}{ln\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{4\ln 10}{ln\left(\frac{6}{5}\right)} \cong 50.52$$

Il più piccolo valore di n richiesto è quindi n=51 .

QUESITO 6

$$y = x|ax^2+b| - 3 \ , \quad x = 1 \ , \quad y = 7x - 9$$

La curva deve passare per il punto della retta di ascissa 1, che ha ordinata $y(1) = -2$.

Se $ax^2 + b \geq 0$: $y = ax^3 + bx - 3$; $y(1) = -2$: $-2 = a + b - 3$, $a + b = 1$
Se $ax^2 + b < 0$: $y = -ax^3 - bx - 3$; $y(1) = -2$: $-2 = -a - b - 3$, $a + b = -1$

Deve poi essere $y'(1) = 7$ e risulta:

- se $ax^2 + b \geq 0$: $y' = 3ax^2 + b$, $y'(1) = 3a + b = 7$

Quindi:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Deve essere $3x^2 - 2 \geq 0$, $x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad vel \quad x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$: x=1 soddisfa.

- se $ax^2 + b < 0$: $y' = -3ax^2 - b$, $y'(1) = -3a - b = 7$

Quindi:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = -7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Deve essere $-3x^2 + 2 < 0$, $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad vel \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}$: x=1 soddisfa.

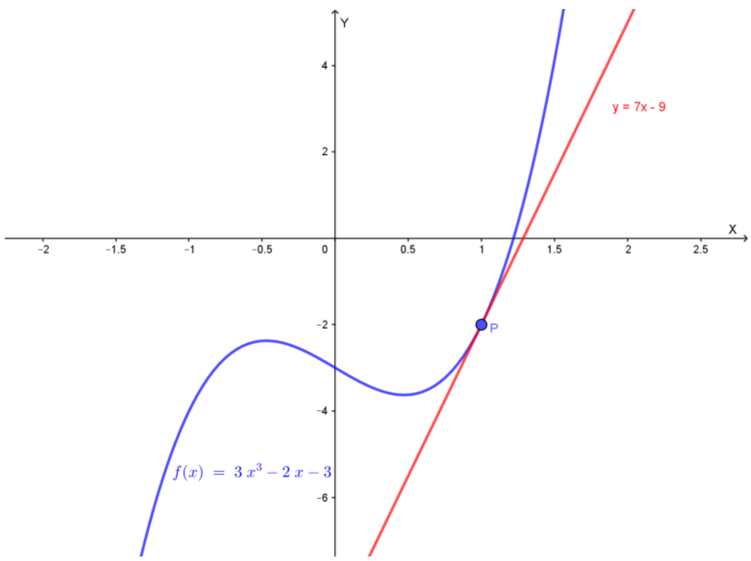
Quindi abbiamo i seguenti possibili valori di a e b:

$$a = 3 \; e \; b = -2 : \quad y = x(|3x^2 - 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^3 - 2x - 3$$
$$a = -3 \; e \; b = 2 : \quad y = x|-3x^2 + 2| - 3 = x(3x^2 - 2) - 3 = 3x^2 - 2x - 3$$

Osserviamo che le due funzioni coincidono.

I valori richiesti di a e b sono: $a = 3 \;\; e \;\; b = -2 \;\; oppure \;\; a = -3 \;\; e \;\; b = 2$

La funzione che soddisfa le condizioni richieste è $y = 3x^3 - 2x - 3$.



QUESITO 7

$$\gamma_1:\ y = x^2 + 1\ , \qquad \gamma_2:\ y = x^2 - 8x + 9\ \ ,\ \ t\ tangente\ comune$$

La retta t ha equazione del tipo $y = mx + q$ (non può essere parallela all'asse y).
Imponiamo la tangenza alla prima parabola:

$$x^2 + 1 = mx + q\ ,\ \ x^2 - mx + 1 - q = 0\ ,\ \ m^2 - 4(1 - q) = 0$$

Imponiamo la tangenza alla seconda parabola:

$$x^2 - 8x + 9 = mx + q\ \ ,\ \ x^2 - (8 + m)x + 9 - q = 0\ \ ,\ \ (8 + m)^2 - 4(9 - q) = 0$$

Affinché t sia tangente ad entrambe le parabole deve essere verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} m^2 - 4(1 - q) = 0 \\ (8 + m)^2 - 4(9 - q) = 0 \end{cases} ;\ \ \begin{cases} m^2 - 4 + 4q = 0 \\ m^2 + 16m + 28 + 4q = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro: $-32 - 16m = 0,\ \ m = -2$ e sostituendo nella prima equazione:

$$4 - 4 + 4q = 0\ , \qquad q = 0$$

La tangente comune alle due parabole ha quindi equazione: $y = -2x$.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due parabole e la retta t.

La prima parabola ha vertice in (0; 1), per asse l'asse delle y e concavità verso l'alto.
La seconda parabola ha vertice in (4; -7) e concavità verso l'alto.

Punto di tangenza fra t e la prima parabola:

$$x^2 - mx + 1 - q = 0,\ \ con\ m = -2\ e\ q = 0:\ \ x^2 + 2x + 1 = 0\ ,\ \ x = -1, \qquad y = 2$$

$$A = (-1; 2)$$

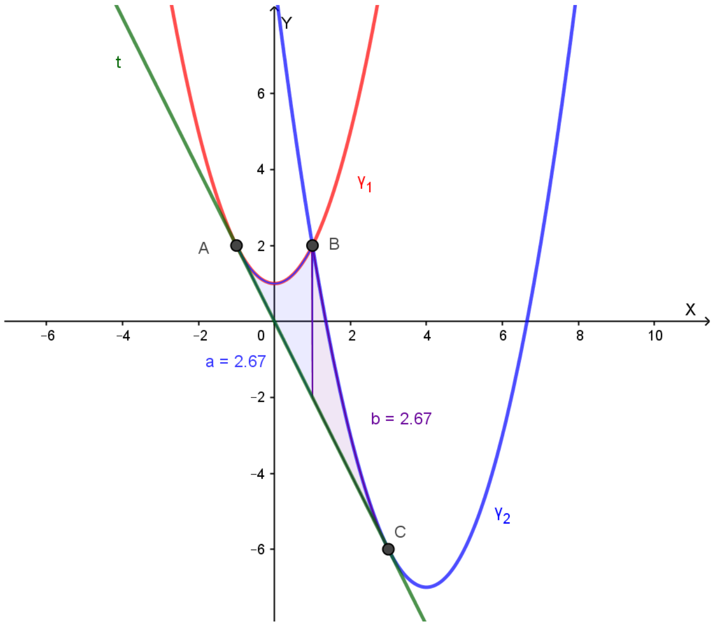
Punto di tangenza fra t e la seconda parabola:

$$x^2 - (8 + m)x + 9 - q = 0\ \ ,\ \ con\ m = -2\ e\ q = 0:\ \ x^2 - 6x + 9 = 0\ ,\ \ x = 3, \qquad y = -6$$

$$C = (3; -6)$$

Intersezioni fra le due parabole:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 8x + 9 \end{cases} ;\ \ x^2 + 1 = x^2 - 8x + 9\ ;\ \ x = 1,\ \ y = 2:\ \ B = (1; 2)$$



L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_{-1}^{1} [x^2 + 1 + 2x]\, dx + \int_{1}^{3} [x^2 - 8x + 9 + 2x]\, dx =$$

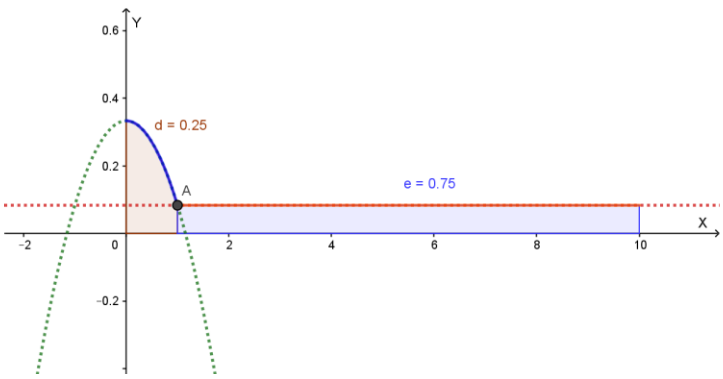
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x + x^2\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_{1}^{3} = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) + 9 - \frac{19}{3} = 9 - \frac{11}{3} =$$

$$= \frac{16}{3}\, u^2 \cong 5.33\, u^2 = Area$$

QUESITO 8

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x^2\,, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{12}\,, & 1 < x \le 10 \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è il seguente:



Osserviamo che, affinché f rappresenti una densità di probabilità deve essere:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = 1$$

E si verifica facilmente che:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx + \int_1^{10} \frac{1}{12}dx = \cdots = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1 \qquad (*)$$

Il valor medio M è dato da:

$$M = \int_a^b x\,f(x)\,dx = \int_0^{10} x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x^2\right)dx + \int_1^{10} x\cdot\frac{1}{12}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{24}x^2\right]_1^{10} = \frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\left(\frac{100}{24}-\frac{1}{24}\right) = \frac{203}{48} \cong 4.23 = M$$

Il valore mediano M_e (cioè la mediana) è quel punto c tale che:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Osservando la figura ed i calcoli (*) si scopre facilmente che c è un punto tra 1 e 10 tale che:

$$(10-c)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\ ,\quad quindi\quad c = 4 = M_e$$

QUESITO 9

Il luogo geometrico richiesto è il “piano assiale” del segmento AB, cioè il piano perpendicolare ad AB nel suo punto medio M.

Essendo A=(0; 1; 2) e B=(-3; 2; 0) il punto medio M ha coordinate: $M = \left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};1\right)$.
Il piano ha parametri direttori a, b e c dati da:

$$a = -3-0 = -3,\quad b = 2-1 = 1,\qquad c = 0-2 = -2$$

Il piano richiesto ha quindi equazione:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0\,,\qquad -3\left(x+\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{3}{2}\right)-2(z-1) = 0$$

$$-3x+y-2z-4 = 0\,,\quad 3x-y+2z+4 = 0$$

Allo stesso risultato si può pervenire imponendo che la distanza del generico punto $P = (x; y; z)$ da A sia uguale alla distanza da B:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2}$$

QUESITO 10

$$y = e^{-x}\, sen\, x \;, \qquad y'' + 2y' + 2y = 0$$

$y' = -e^{-x}\, sen\, x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(-sen\, x + \cos x),$

$y'' = -e^{-x}(-sen\, x + \cos x) + e^{-x}(-cos\, x - sen\, x) = -2\cos x\, e^{-x}$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$-2\cos x\, e^{-x} + 2e^{-x}(-sen\, x + \cos x) + 2e^{-x}\, sen\, x =$$
$$= 2e^{-x}(-\cos x - sen\, x + \cos x + senx) = 2e^{-x}(0) = 0 \;\; \forall x$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria