SESSIONE SUPPLETIVA – 2018 - PROBLEMA 1

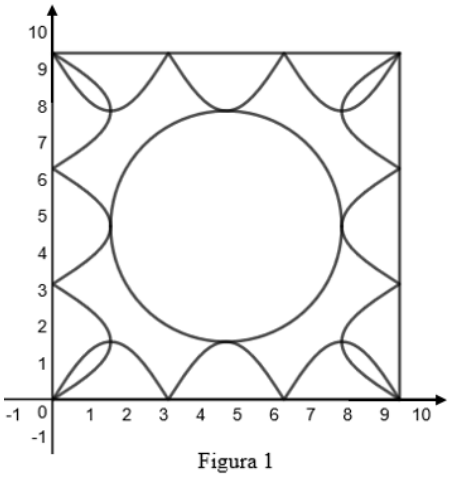
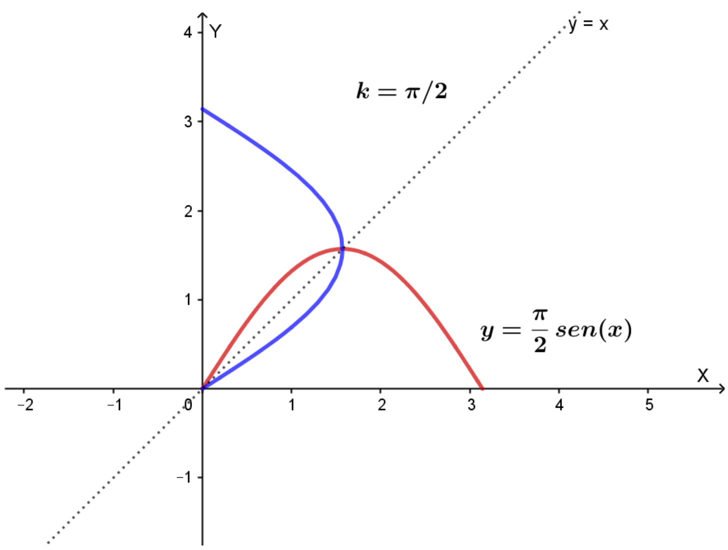


Figura 1

$y = k|sen(x)|\ con\ \ x \in [0; 3\pi], \qquad k > 0$

1)

La funzione data ha periodo π . Consideriamo la parte di grafico in $[0;\pi]$ e la sua simmetrica rispetto alla bisettrice y=x: essa rappresenta la prima parte della cornice sull'asse y. I due grafici si intersecano sulla suddetta bisettrice. La funzione $y = k|sen(x)|$ ha il primo massimo in $\left(\frac{\pi}{2}; k\right)$ e quindi incontra la sua simmetrica in tale punto se $k = \frac{\pi}{2}$.



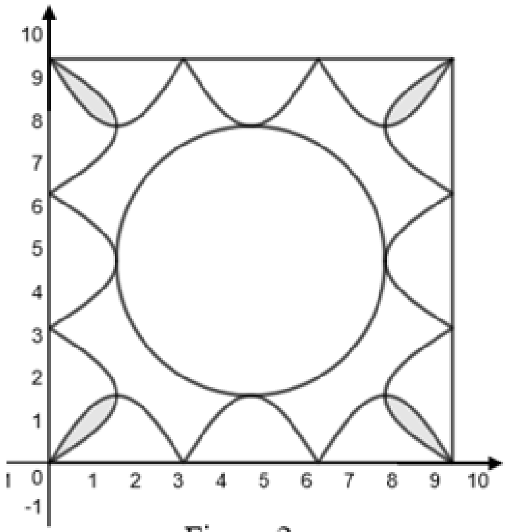
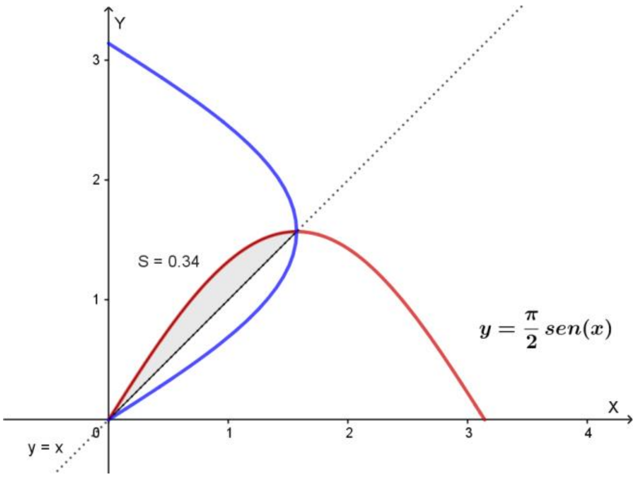


Figura 2

L'area della quattro regioni da rivestire è uguale a 8 volte l'area S della regione compresa fra i grafici delle curve $y = \frac{\pi}{2} sen\, x \quad e \quad y = x \quad in \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



Risulta:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} sen\, x - x\right) dx = \left[-\frac{\pi}{2}\cos x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\, dm^2$$

Quindi l'area A della regione da colorare (approssimiamo $\pi\ con\ 3.14$) è:

$$A = 8S = 8\left(-\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = (4\pi - \pi^2)\, dm^2 \cong (2.70)\, dm^2$$

2)

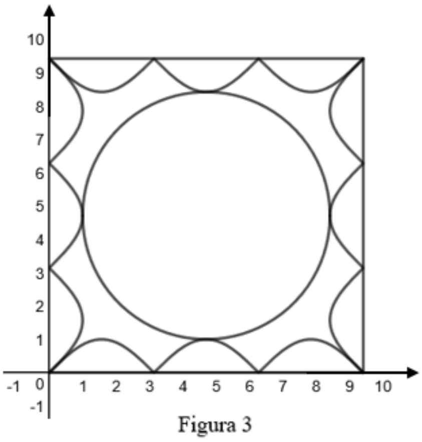
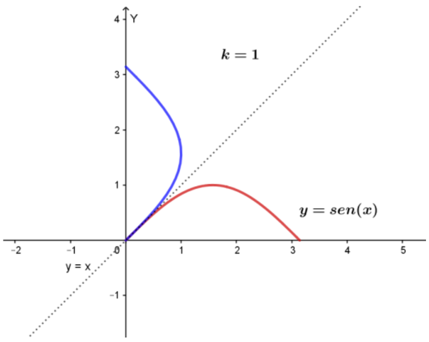
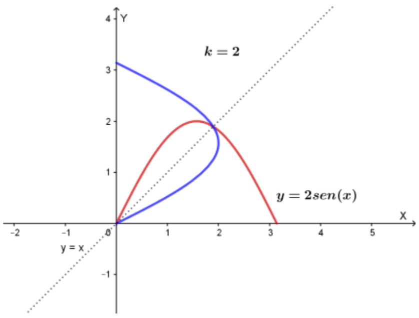


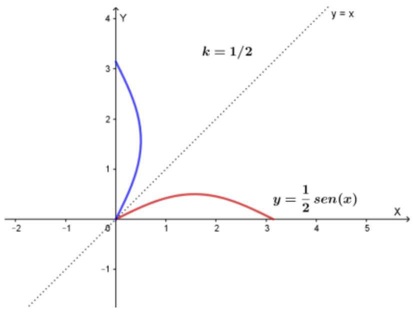
Figura 3

I primi archi della decorazione sull'asse x e sull'asse y, si devono incontrare **solo nell'origine** degli assi e sono simmetrici rispetto alla retta y=x. Essi sono tangenti nell'origine se entrambi sono tangenti alla retta y=x, quindi l'arco sull'asse x deve avere equazione $y = sen\, x$: $quindi\ k = 1$. Se $k > 1$ i due grafici si incontrano in un altro punto oltre all'origine; per incontrarsi solo nell'origine deve quindi essere $k \leq 1$. In particolare per $k = 0$ non c'è alcuna decorazione e lo specchio è tangente al quadrato.

Esempi con k=1, k>1, 0<k<1:







Esprimiamo in funzione di $k \in [0; 1]$ l'area della parte di cornice compresa fra i lati e le quattro curve goniometriche. Tale area è 12 volte l'area R della regione compresa fra il grafico di $y = k\, sen\, x$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0; \pi]$. Risulta:

$$R = \int_0^{\pi} (k\, sen\, x)\, dx = k[-\cos x]_0^{\pi} = k(1+1) = (2k)\, dm^2$$

Quindi l'area richiesta è:

$$Area = 12R = (24k)\, dm^2$$

3)

La circonferenza contorno dello specchio ha centro nel centro del quadrato, che ha coordinate $C = \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ e raggio uguale $\frac{3}{2}\pi - k$, essendo k l'ordinata del massimo della funzione $y = k\, sen\, x$ nell'intervallo $[\pi; 2\pi]$. Quindi:

$$Area(specchio) = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2 dm^2$$

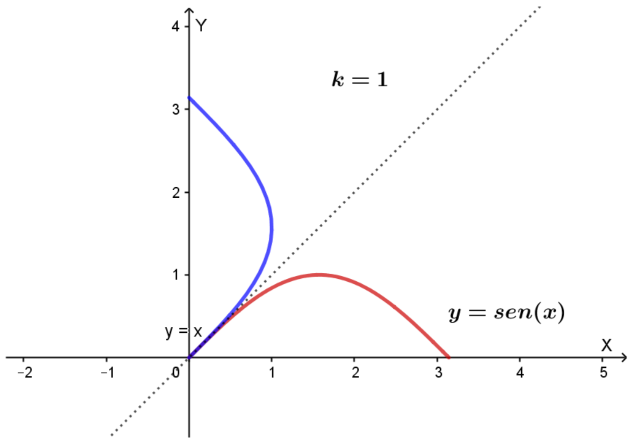
L'area minima (per la fig. 3) dello specchio si avrà in corrispondenza del massimo valore di k, che è 1. Approssimando π con 3.14 si ha:

$$Area(minima) = \pi\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)^2 dm^2 \cong 43.22\ dm^2$$

L'area massima dello specchio si avrà in corrispondenza del minimo valore di k, che è 0:

$$Area(massima) = \pi\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 dm^2 = \frac{9\pi^3}{4} \cong 69.66\ dm^2$$

4)



L'area da verniciare è data dall'area del quadrato meno l'area dello specchio meno l'area della regione compresa fra le quattro curve ed i lati del quadrato:

$$Area(da\ verniciare) = \left[(3\pi)^2 - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)^2 - 24\right] dm^2 \cong 21.52\ dm^2$$

Siccome con 1 litro di vernice si coprono $6\ m^2 = 600\ dm^2$, con $1\ ml$ si copriranno $0.6\ dm^2$
E quindi con $125\ ml$ si copriranno $(0.6\ )(125) dm^2 = 75\ dm^2$.
Per passare due mani di vernice occorre ricoprire $21.52 \cdot 2\ dm^2 = 43.04\ dm^2$

Quindi la quantità di vernice a disposizione è sufficiente.

La quantità di vernice richiesta in funzione di k è:

$Area(k) = 2\left[(3\pi)^2 - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2 - 24k\right]$ che è massima se è massima

$$y(k) = (3\pi)^2 - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2 - 24k = -\pi k^2 + (3\pi^2 - 24)k - \frac{9\pi^3}{4} + 9\pi^2$$

Il grafico di questa funzione è una parabola con la concavità verso il basso, quindi il suo massimo si avrà nel vertice (se incluso nelle limitazioni di k), cioè in:

$$k = -\frac{b}{2a} = -\frac{3\pi^2 - 24}{-2\pi} = \frac{3\pi^2 - 24}{2\pi} \cong 0.89, \qquad che\ è\ compreso\ nei\ limiti\ di\ k.$$

La quantità di vernice richiesta è massima se $k = \frac{3\pi^2-24}{2\pi} \cong 0.89.$

Con la collaborazione di Angela Santamaria