SESSIONE SUPPLETIVA – 2018 - PROBLEMA 2

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \quad e \quad g_k(x) = e^{\frac{x}{k}} \ , \quad k > 0$$

1)

L'inversa di $y = k \cdot \ln(x)$ si ottiene nel seguente modo:

$\frac{y}{k} = \ln(x), \ \ e^{\frac{y}{k}} = x, \ \ da\ cui, scambiando\ x\ con\ y, \ \ y = g_k(x) = e^{\frac{x}{k}}$

Quindi l'inversa di f_k è g_k $e\ viceversa.$

Ricordiamo che in generale, dette f ed f^{-1} due funzioni una inversa dell'altra si ha:

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i\ , \ \ essendo\ i\ la\ funzione\ identità\ di\ equazione\ y = x$

Verifichiamolo direttamente nel caso richiesto.

$$a(x) = f_k(g_k(x)) = k \cdot \ln\left(e^{\frac{x}{k}}\right) = k \cdot \frac{x}{k} = x, \forall x \in R$$

$$b(x) = g_k(f_k(x)) = e^{\frac{k \cdot \ln(x)}{k}} = e^{\ln(x)} = x, x > 0$$

Quindi: $a(x) = b(x) \quad solo\ per\ x > 0$

2)

$r\colon\ y = x\ , \ \ f_2(x) = 2\ln(x)\ , \qquad F_2 \ \ grafico\ di\ f_2\ , \qquad s_2\ parallela\ ad\ r\ e\ tangente\ a\ \ F_2$

La retta s_2 ha equazione del tipo: $y = x + q = g(x)$ ed tangente ad F_2 se:

$$\begin{cases} 2\ln(x) = x + q \\ f_2'(x) = g'(x) \end{cases} , \quad \begin{cases} 2\ln(x) = x + q \\ \frac{2}{x} = 1\ , \ \ x = 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} q = 2\ln(2) - 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Quindi s_2 ha equazione: $y = x + 2\ln(2) - 2$

N.B. Il punto di tangenza è $A = (2; 2\ln(2))$.

$r\colon\ y = x\ , \ \ g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}\ , \qquad G_2 \ \ grafico\ di\ g_2\ , \qquad t_2 \ \ parallela\ ad\ r\ e\ tangente\ a\ \ G_2$

Osserviamo che, essendo $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ l'inversa di $f_2(x) = 2\ln(x)$, e ricordando che i grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla retta y=x, la retta t_2 sarà simmetrica di s_2 rispetto ad y=x, quindi la sua equazione si ottiene da quella di s_2 scambiando la x con la y: $x = y + 2\ln(2) - 2$, $da\ cui$: $y = x + 2 - \ln(2):\ t_2$

Procedendo direttamente:

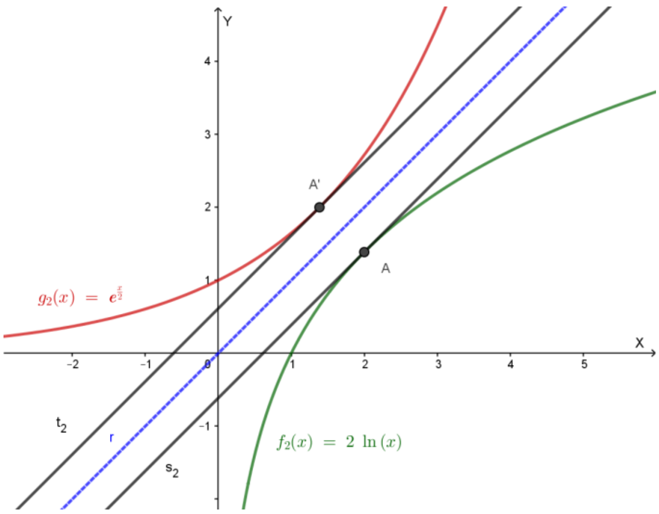
la retta t_2 ha equazione del tipo: $y = x + n = h(x)$ ed tangente ad G_2 se:

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{2}} = x + n \\ g_2'(x) = h'(x) \end{cases},\quad \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} = x + n \\ \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = 1\ ,\quad e^{\frac{x}{2}} = 2\ ,\frac{x}{2} = \ln(2),\quad x = 2\ln(2) \end{cases},\begin{cases} n = e^{\frac{x}{2}} - x \\ x = 2\ln(2) \end{cases} = 2 - 2\ln(2)$$

Quindi t_2 ha equazione: $y = x + 2 - 2\ln(2)$

N.B. Il punto di tangenza è $A' = (2\ln(2); 2)$.

Rappresentiamo i grafici di $F_2,\ G_2,\ s_2\ e\ t_2$, osservando che il grafico di $f_2(x) = 2\ln(x)$ si ottiene da quello di $y = \ln(x)$ mediante una dilatazione verticale di fattore 2 e che il grafico di $g_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ si ottiene da quello di $f_2(x) = 2\ln(x)$ mediante una simmetria rispetto alla retta $y = x$.



La distanza minima tra un punto di $F_2\ ed\ un\ punto\ di\ G_2$ equivale alla distanza fra le rette $s_2\ e\ t_2$, uguale alla distanza fra i punti di tangenza $A = (2; 2\ln(2))\ e\ \ A' = (2\ln(2); 2)$:

$$d(minima) = AA' = \sqrt{(2 - 2\ln(2))^2 + (2\ln(2) - 2)^2} = (2 - 2\ln(2))\sqrt{2}\ \cong 0.87$$

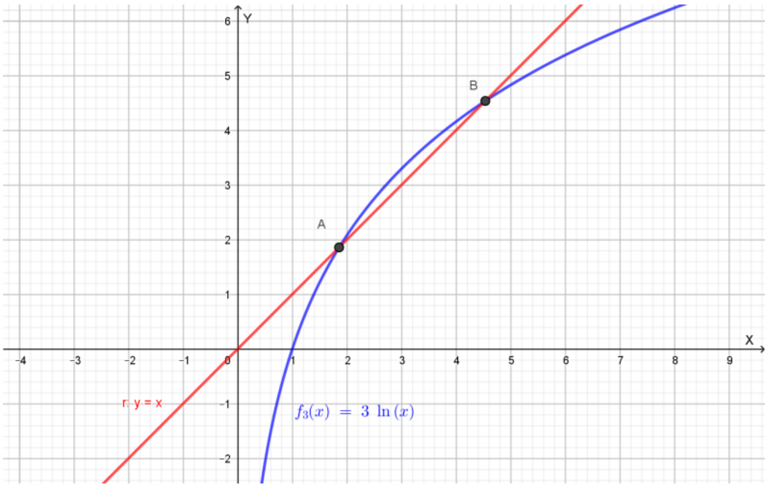
3)

$f_3(x) = g_3(x)\ \ \Rightarrow\ \ 3\ln(x) = e^{\frac{x}{3}}\quad (*)$

Poiché le due curve sono simmetriche rispetto alla retta y=x le loro eventuali intersezioni

coincidono con le intersezioni di una di esse con la retta suddetta.
Le soluzioni della (*) coincidono quindi con le soluzioni di: $3\ln(x) = x$.
Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le curve di equazioni: $y = 3\ln(x)$ e $y = x$.
La seconda è la bisettrice del primo e terzo quadrante, la prima si ottiene da $y = \ln(x)$

mediante una dilatazione verticale di fattore 3.



Osserviamo per x<1 il grafico della retta è sicuramente sopra il grafico della funzione logaritmica. Per x=e la retta ha ordinata e mentre la funzione logaritmica ha ordinate 3, quindi le curve si intersecano in un punto di ascissa compresa fra 1 ed e. Per $x = e^2$ la retta ha ordinata e^2 mentre la funzione logaritmica ha ordinata 6; essendo $e^2 > 6$ le due curve si intersecano in un secondo punto di ascissa compresa fra e ed e^2.

L'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede pertanto due soluzioni.

In base a quanto detto precedentemente, studiare le intersezioni tra curve F_k e G_k equivale a studiare le intersezioni fra una di esse e la retta r di equazione $y = x = r(x)$.

Vediamo quando F_k ed r sono tangenti (ricordiamo che x>0):

$$\begin{cases} f_k(x) = r(x) \\ f_k'(x) = r'(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} k \cdot ln(x) = x \\ \dfrac{k}{x} = 1 ; \quad k = x \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \cdot ln(x) = x \\ k = x \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ln(x) = 1; \quad x = e \\ k = e \end{cases}$$

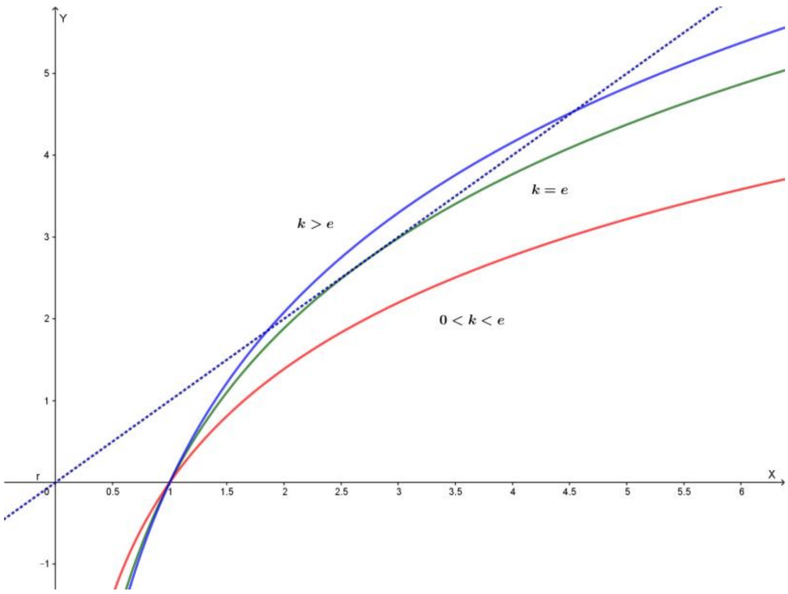
Quindi F_k ed r sono tangenti se $k = e$. Punto di tangenza $C = (e; e)$.

Siccome $f_k(x) = k \cdot ln(x)$ si ottiene da $y = \ln(x)$ con una deformazione verticale di rapporto k>0, per $k > e$ F_k taglia r in due punti distinti e per $0 < k < e$ F_k non taglia r.

In conclusione:

F_k e G_k sono secanti (con due intersezioni) se $k > e$, sono disgiunti se $0 < k < e$ e tangenti se $k = e$.

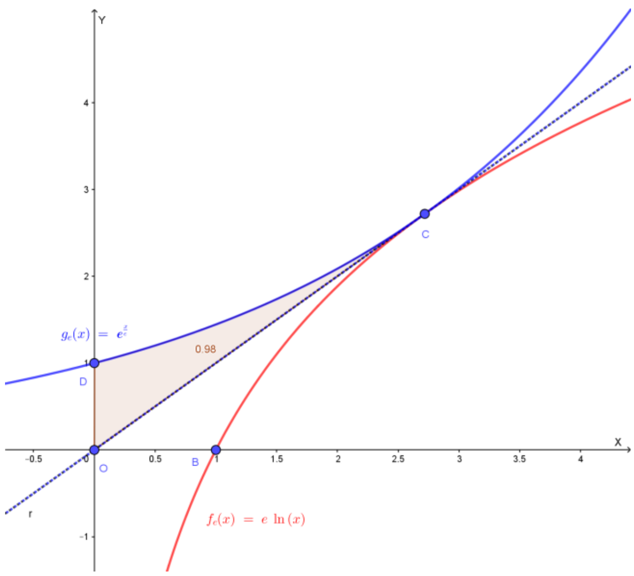
Rappresentiamo graficamente la situazione tra F_k ed r:



4)

F_e: $f_e(x) = e\ln(x)$, G_e: $g_e(x) = e^{\frac{x}{e}}$

I loro grafici sono indicati in figura:



La regione A è il quadrilatero mistilineo OBCD, con:

$O = (0; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (e; e)$, $D = (0; 1)$

L'area di A è il doppio dell'area della regione compresa fra l'asse y, la retta y=x e la curva g_e. Quindi:

$$A = 2\left(\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}} - x\right) dx\right) = 2\left[e \cdot e^{\frac{x}{e}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^e = 2\left(e^2 - \frac{e^2}{2} - e\right) = (e^2 - 2e)\ u^2 \cong 1.95\ u^2$$

Calcoliamo ora il volume del solido ottenuto (per esempio) dalla rotazione di A attorno all'asse x (uguale a quello ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y).

$$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\frac{x}{e}}\right)^2 dx + \pi \int_1^e \left[\left(e^{\frac{x}{e}}\right)^2 - (e\ln(x))^2\right] dx = \pi \int_0^1 e^{\frac{2x}{e}} dx + \pi \int_1^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi e^2 \int_1^e \ln^2(x)\, dx$$

Calcoliamo i seguenti integrali indefiniti:

$$\int e^{\frac{2x}{e}} = \frac{e}{2}\, e^{\frac{2x}{e}} + a$$

$$\int \ln^2(x)\, dx = \cdots per\ parti = \int (x)' \ln^2(x)\, dx = xln^2(x) - \int x \cdot \frac{2}{x} \ln(x)\, dx =$$

$$= xln^2(x) - 2\int \ln(x)\, dx = xln^2(x) - 2\int (x)'\ \ln(x)\, dx = xln^2(x) - 2\left[xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right]$$

$$=\ xln^2(x) - 2[xln(x) - x] + b = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + b$$

Quindi:

$$V = \pi \int_0^1 e^{\frac{2x}{e}} dx + \pi \int_1^e e^{\frac{2x}{e}} dx - \pi e^2 \int_1^e \ln^2(x)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{e}{2}\, e^{\frac{2x}{e}}\right]_0^1 + \pi \left[\frac{e}{2}\, e^{\frac{2x}{e}}\right]_1^e - \pi e^2 \left[x\left(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2\right)\right]_1^e =$$

$$= \pi\left(\frac{e}{2}\, e^{\frac{2}{e}} - \frac{e}{2}\right) + \pi\left(\frac{e}{2}e^2 - \frac{e}{2}e^{\frac{2}{e}}\right) - \ \pi e^2(e-2) = \frac{\pi e}{2}(-e^2 - 1 + 4e)\ \ u^3 \cong 10.607\ \ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria