LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO AUSTRALE

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} a - \frac{b}{(1-x)^2} & 0 \le x < 1 \\ a + \frac{b}{(1-x)^2} & x > 1 \end{cases}$ in cui a e b sono due costanti positive.

a)

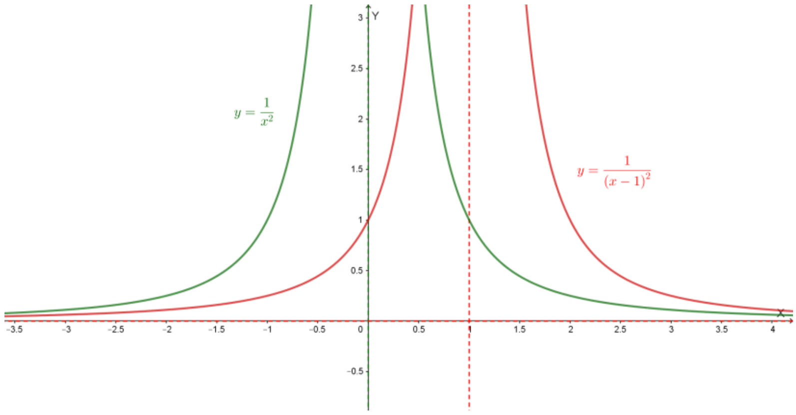
Studiare $f(x)$, al variare di a e b, scrivendo le equazioni degli asintoti e stabilendo sotto quali condizioni esiste x_0, con $0 \le x_0 < 1$, in modo che $f(x_0) = 0$. Determinare a e b, affinché si abbia $x_0 = \frac{1}{2}$ e la retta di equazione $16x + y - 8 = 0$ sia tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Studiamo la funzione $\boldsymbol{y = g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}}$

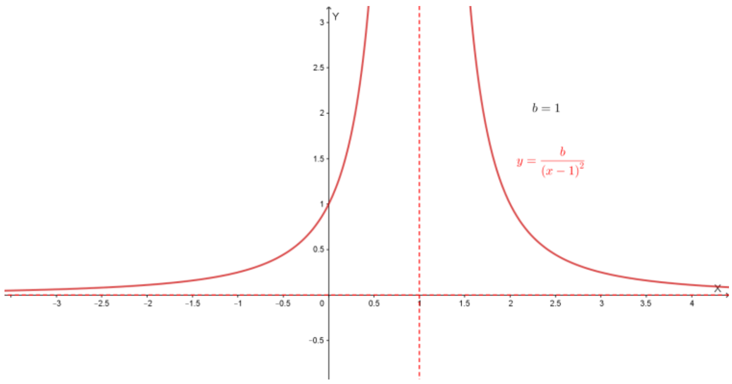
Il suo grafico si ottiene da quello di $y = \frac{1}{x^2}$ con una traslazione verso destra di 1.

La funzione è definita per ogni $x \neq 1$, dove è sempre positiva, ha l'asintoto verticale $x = 1$, e l'asintoto orizzontale $y = 0$.

Grafico:



Rappresentiamo ora la funzione $\boldsymbol{y = h(x) = \frac{b}{(1-x)^2} = \frac{b}{(x-1)^2}}$, $\boldsymbol{con\ b > 0\ (per\ esempio\ b = 1)}$:



La funzione $y = f(x)$ si ottiene mediante semplici simmetrie e traslazioni nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -h(x) + a, & se\ 0 \leq x < 1 \\ h(x) + a, & se\ x > 1 \end{cases}$$

(scegliamo per fissare le idee $a = 4\ e\ b = 1$):

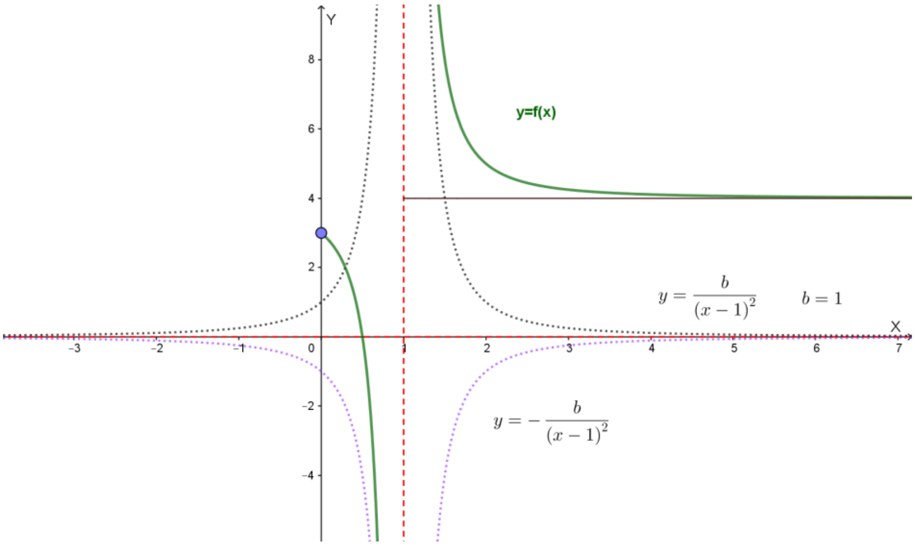
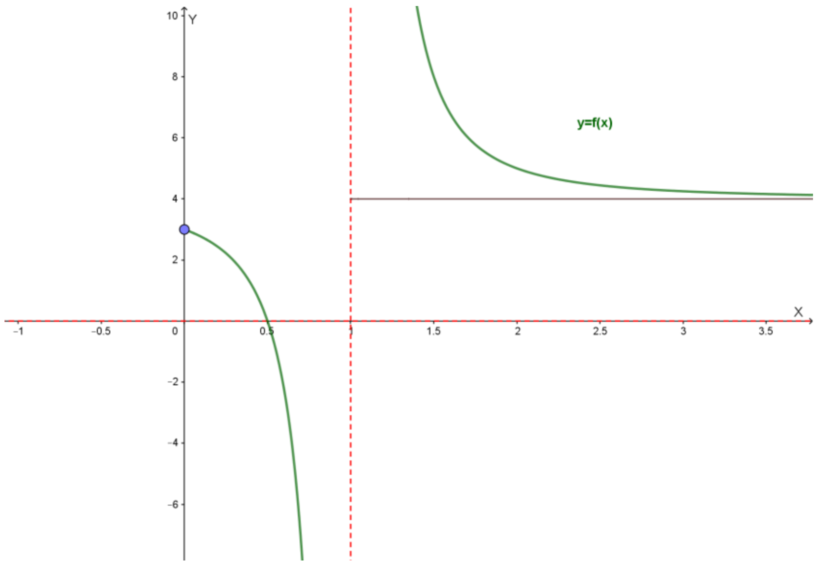


Grafico di $\boldsymbol{y = f(x)}$:



La funzione f ha i seguenti asintoti:

$asintototo\ verticale: x = 1 \quad e \quad y = a \quad per\ x > 1$

Risulta $f(x) = 0$ se $a - \frac{b}{(1-x)^2} = 0 \ \ se\ \ (1-x)^2 = \frac{b}{a}$, $1 - x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, $x = 1 \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$

Esiste $x_0, con\ \ 0 \leq x_0 < 1$ in modo che $f(x_0) = 0\ se \quad x_0 = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 0$, $\sqrt{\frac{b}{a}} \leq 1$, $b \leq a$. In particolare se $b = a$ si ha $x_0 = 0$, se $b < a\ \ si\ ha\ \ 0 < x_0 < 1$.

Determiniamo ora a e b in modo che si abbia $x_0 = \frac{1}{2}$ e che la retta di equazione $16x + y - 8 = 0$ sia tangente nel punto $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ al grafico di f.

$$x_0 = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{4}, \qquad a = 4b$$

Affinché la retta di equazione $16x + y - 8 = 0$ $(m = -16)$ sia tangente nel punto $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ al grafico di f deve essere $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -16$.

Ma è (per $0 \leq x < 1$):

$$f'(x) = D\left(a - \frac{b}{(1-x)^2}\right) = D(-b(1-x)^{-2}) = -2b(1-x)^{-3}$$

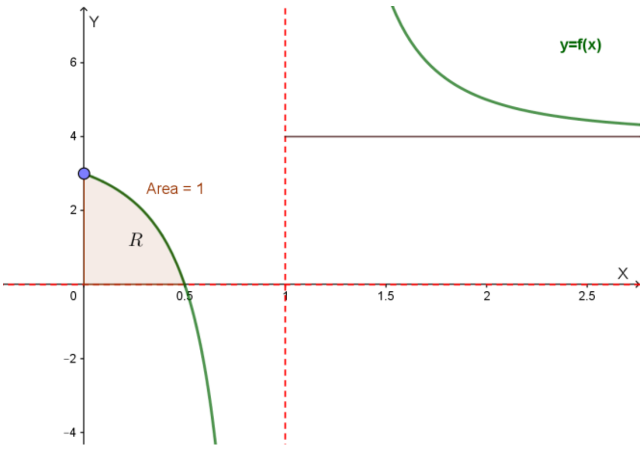
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2b(8) = -16b = -16 \; se \; b = 1 \; e \; quindi \; a = 4b = 4.$$

La funzione richiesta ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \dfrac{1}{(1-x)^2}, & se \; 0 \leq x < 1 \\ 4 + \dfrac{1}{(1-x)^2}, & se \; x > 1 \end{cases}$$

b)

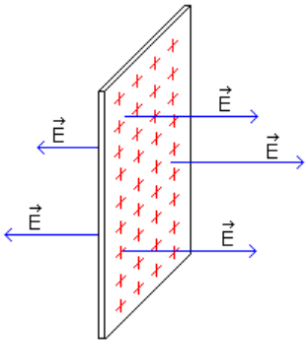
Posto $a = 4$ e $b = 1$, determinare l'area della regione R, delimitata dal grafico di $f(x)$ e dagli assi coordinati.



L'area della regione R si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(R) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(4 - \frac{1}{(1-x)^2}\right) dx = \left[4x - \frac{1}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - 2 - (0 - 1) = 1 \; u^2 = Area(R)$$

Si consideri una superficie π, piana e infinita, sulla quale è distribuita una carica positiva con densità uniforme σ, espressa in coulomb al metro quadrato. Ad una distanza $d = 1m$ da π, è posta una carica q, puntiforme e positiva, espressa in coulomb. Sia s la semiretta passante per la carica q, che ha origine sul piano π ed è ad esso perpendicolare. Si indichi con P un generico punto di s, a distanza $x \geq 0$ dal piano.



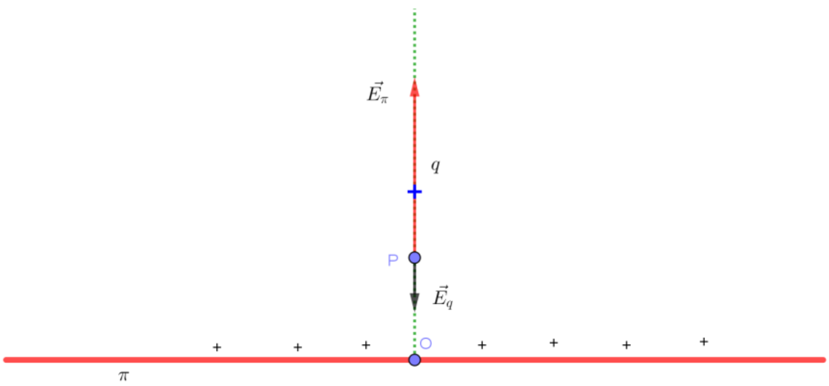
Il campo elettrico generato dalla superficie π è uniforme, ha intensità $E_\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, è perpendicolare alla superficie ed ha verso uscente dalla superficie stessa.
Il campo elettrico generato dalla carica puntiforme positiva q ha in un punto P posto a distanza r dalla carica intensità $E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, direzione lungo la congiungente la carica con P e verso uscente dalla carica.

c)

Qual è la direzione del vettore campo elettrico in P? Verificare che, per opportuni valori delle costanti fisiche a e b, la funzione $f(x)$ esprime l'intensità e il verso del vettore campo elettrico in P. Effettuare un'analisi dimensionale delle costanti a e b.

Orientiamo la semiretta s dal piano verso P.

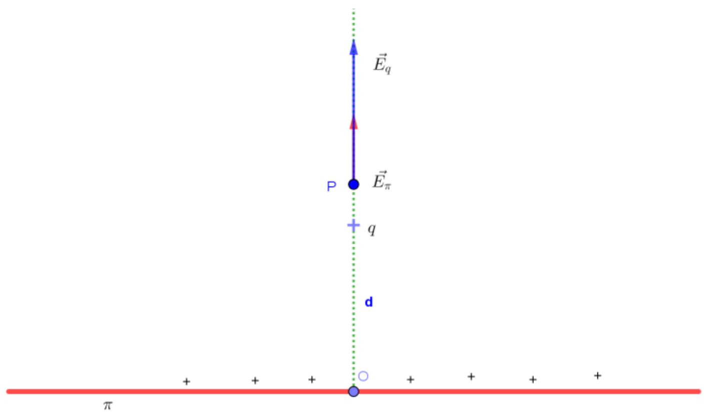
Se $0 \leq x < 1$ si ha la seguente situazione:



La componente del campo elettrico in P lungo s è:

$$E = E_\pi - E_q = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(1-x)^2}$$

Se $x > 1$ si ha la seguente situazione:



La direzione del vettore campo elettrico in P è quella della retta s ed ha intensità:

$$E = E_\pi + E_q = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x-1)^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Posto $a = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ e $b = \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0}$ si ha quindi:

$$E(x) = \begin{cases} \mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{b}}{(1-x)^2}, & se\ 0 \leq x < 1 \\ \mathrm{a} + \dfrac{\mathrm{b}}{(1-x)^2}, & se\ x > 1 \end{cases} = f(x)$$

N.B. Se P coincide con la posizione di q il campo tende all'infinito.

Analizziamo le dimensioni di a e b:

$$[a] = \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right] = [E] = \left[\frac{F}{q}\right] = \left[\frac{ma}{it}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{IT}\right] = [MLT^{-3}I^{-1}]$$

L'unità di misura di a è N/C.

$$[b] = \left[\frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0}\right] = \left[\frac{\mathrm{q}}{\epsilon_0}\right] = \left[\frac{q}{\frac{q^2}{F \cdot s^2}}\right] = \left[\frac{F \cdot s^2}{\mathrm{q}}\right] = \left[\frac{MLT^{-2} \cdot L^2}{\mathrm{IT}}\right] = [ML^3T^{-3}I^{-1}]$$

L'unità di misura di b è $N \cdot m^2/C$.

d)

Verificare che esiste un punto, sulla semiretta s, in cui il campo elettrico è nullo. Stabilire se, in tale punto, una carica in quiete, a seconda del suo segno, si troverebbe in equilibrio stabile oppure instabile.

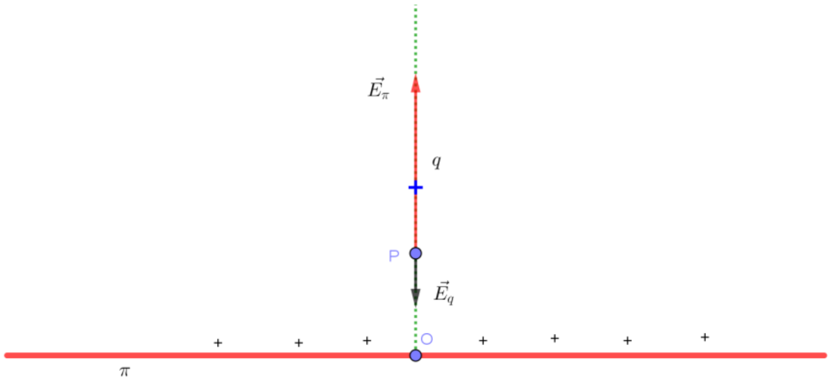
Poiché l'intensità del campo elettrico è espressa dalla funzione f(x), il campo è nullo nel punto

$x_0 = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}}$ trovato precedentemente, con $a \geq b,\ quindi\ \ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \geq \frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0}\ \ ,\ \ \sigma \geq \frac{q}{2\pi}$.

Essendo $\frac{b}{a} = \frac{\frac{\mathrm{q}}{4\pi\epsilon_0}}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} = \frac{q}{2\pi\sigma}$ il punto sulla semiretta s in cui il campo elettrico è nullo è dato da:

$$x_0 = 1 - \sqrt{\frac{q}{2\pi\sigma}}\ \ ,\ \ con\ \ q \leq 2\pi\sigma\ .$$

Se in tale posizione (che si trova tra la posizione di q e la superficie piana) si trova una carica Q in equilibrio (le forze elettriche generate dai due campi elettrici si fanno equilibrio) si hanno due possibilità.



- se la carica Q è positiva, sottoponendola ad un piccolo spostamento essa tende ad essere respinta sia dalla carica positiva q (quindi si sposta verso il basso) che dalla superficie carica positivamente π (quindi si sposta verso l'alto); perciò Q tende a tornare nella sua posizione di equilibrio, che pertanto è stabile.

- se Q è negativa il suo equilibrio è instabile. Infatti spostandola di poco dalla sua posizione di equilibrio tende ad essere attratta o da q (se la spostiamo verso di essa, perché $F_q > F_\pi$) o da π (se la spostiamo verso π, perché $F_q < F_\pi$) quindi non tende a tornare nella sua posizione di equilibrio.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri