# LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO AUSTRALE

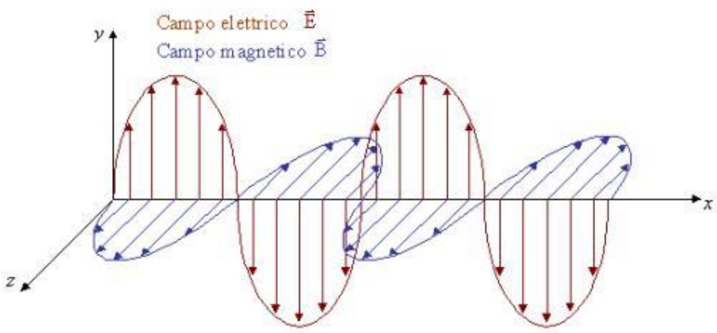
## PROBLEMA 2

Un'onda elettromagnetica piana si propaga nel vuoto ed è linearmente polarizzata. Il campo elettrico dell'onda varia secondo la legge $\vec{E}(x,t) = E_0 sin(kx - \omega t)\hat{y}$, in cui $\hat{y}$ è il versore dell'asse $y$.

**a)**

Descrivere, in modo qualitativo, il meccanismo di generazione e propagazione di un'onda elettromagnetica e specificare il significato di $E_0$, $k$, $\omega$.

Maxwell, mediante le sue note equazioni, ipotizza l'esistenza di un campo elettromagnetico che si propaga nello spazio come un'onda. Egli prevede che un campo elettrico opportunamente variabile genera un campo magnetico anch'esso variabile (perpendicolare al campo elettrico), che genera a sua volta un campo elettrico variabile (perpendicolare al campo magnetico), e così via.




Un'onda elettromagnetica è quindi la propagazione di una perturbazione dello spazio causata da un campo elettrico variabile. Le onde elettromagnetiche sono onde trasversali. L'onda si dice polarizzata linearmente se il campo elettrico vibra sempre nello stesso piano e lo stesso avviene per il campo magnetico (che vibrerà in un piano perpendicolare). La direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare ad entrambi i piani in cui vibrano il campo elettrico ed il campo magnetico.

Fissato un sistema di riferimento Oxyz e facendo variare il campo elettrico lungo l'asse y (in modo sinusoidale), si avrà un campo magnetico variabile nel piano xz (anch'esso sinusoidale). Nel generico punto distante x dall'origine del sistema di riferimento, nel generico istante t le intensità dei campi elettrici $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variano secondo leggi del tipo:

$$E = E_0 \sin(k\,x - \omega t)\,, \quad B = B_0 \sin(k\,x - \omega t)\,, \quad con\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \ \ e \ \ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

L'onda elettromagnetica prodotta ha equazione del tipo:

$\psi(x,t) = A\sin(k\,x - \omega t)$, *dove* $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$ *è detto vettore d'onda* ($\hat{k}$ è il versore lungo cui si propaga l'onda), $\lambda$ è la lunghezza d'onda, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ è la pulsazione, essendo T il periodo ed f la frequenza dell'onda. Inoltre si ha la relazione: $\lambda f = c$, *essendo c la velocità della luce*.

Hertz (1857-1894) nel 1886 riuscì per la prima volta a produrre e a rivelare le onde elettromagnetiche di cui Maxwell aveva previsto l'esistenza. Secondo Maxwell, le onde elettromagnetiche avrebbero dovuto essere prodotte dalle oscillazioni di cariche elettriche lungo un circuito ed Hertz riuscì a generare radiazioni elettromagnetiche mediante un dispositivo schematizzabile con un dipolo elettrico oscillante.

Le costanti presenti nel campo elettrico dell'onda $E(x,t) = E_0\sin(k\,x - \omega t)$ indicano:

$E_0$: *valore massimo di* $E$; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, *essendo* $\lambda$ *la lunghezza dell'onda,*

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ *è la pulsazione, dove* $T$ *è il periodo dell'onda ed* $f$ *la sua frequenza.*

**b)**

Nel caso in cui l'ampiezza di oscillazione sia $2{,}0\ V/m$ e la frequenza di oscillazione sia $5{,}0 \cdot 10^5 Hz$, scrivere l'espressione del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda, individuando la direzione di oscillazione di $\vec{B}$ e la direzione di propagazione. Giustificare le risposte fornite.

Con i dati indicati si ha: $\omega = 2\pi \cdot 5.0 \cdot 10^5\ \frac{rad}{s} = \pi \cdot 10^6\ \frac{rad}{s}$, $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{5.0 \cdot 10^5\ s^{-1}} = 6 \cdot 10^2\ m$,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{(6 \cdot 10^2\ m)} = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-2}\ m^{-1} \cong 0.010\ m^{-1} = \frac{1}{100}\ m^{-1}$$

Quindi le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico che generano l'onda, ricordando la relazione $E = cB$ (dove c è la velocità della luce), sono le seguenti:

$$E = E_0\sin(k\,x - \omega t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 10^{-2}\,x - \pi \cdot 10^6\,t\right),$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2.0\ \frac{V}{m}}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \cong 6.7 \cdot 10^{-9}\ T$$

$$B = B_0\sin(k\,x - \omega t) = \frac{E_0}{c}\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 10^{-2}\,x - \pi \cdot 10^6\,t\right) = 6.7 \cdot 10^{-9}\ \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 10^{-2}\,x - \pi \cdot 10^6\,t\right)$$

In base a quanto detto precedentemente, il campo elettrico oscilla nel piano xy ed il campo magnetico nel piano perpendicolare xz. Il verso di propagazione è quello dell'asse x.

Si consideri la funzione $f(x) = A\sin(kx - \omega t)$ dove $A$ e $k$ sono costanti positive, $\omega = 10^6\pi$ e $t = 5 \cdot 10^{-7}$.

**c)**

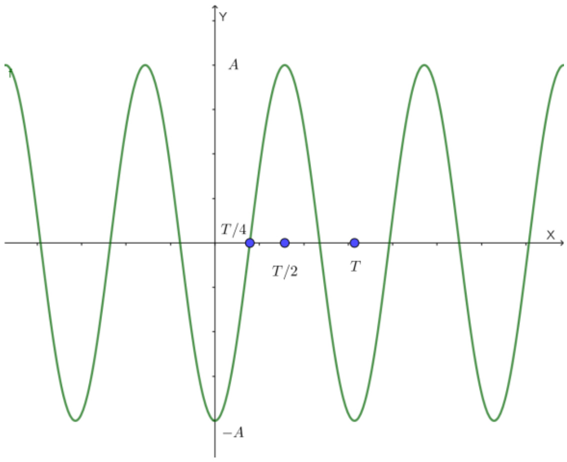
Esprimere il periodo e l'immagine di $f(x)$, specificando le ascisse dei punti di massimo, minimo e flesso. Stabilire per quali valori di $A$ e $k$ l'immagine di $f(x)$ coincide con l'intervallo [-2,2] e il periodo è $\frac{\pi}{2}$.

La funzione f(x) ha equazione del tipo:

$$f(x) = A\sin\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = -A\cos(kx)\,, \quad con\ A > 0\ \ e\ \ k > 0$$

La funzione f ha periodo $T = \frac{2\pi}{k}$ ed è una funzione coseno di ampiezza A ribaltata rispetto all'asse x.; l'immagine di f è quindi data dall'intervallo [-A; A].

Osservando il seguente grafico possiamo rispondere facilmente alle domande poste:




I punti di massimo sono $x = \frac{T}{2} + (h\,T) = \frac{\pi}{k} + \left(h\,\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{(2h+1)\pi}{k},\ con\ h \in Z$

I punti di minimo sono $x = 0 + (n\,T) = \left(n\,\frac{2\pi}{k}\right) == \frac{\pi}{k}(2n),\ con\ n \in Z\ .$

I punti di flesso sono: $x = \frac{T}{4} + s\,\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2k} + s\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2k}\,(2s+1),\ con\ s \in Z.$

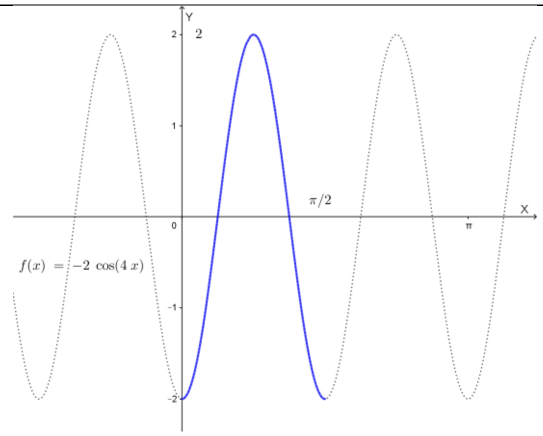
L'immagine di f(x) coincide con l'intervallo [-2; 2] ed il periodo è $\frac{\pi}{2}$ $\ per\ A = 2\ \ e\ \ k = 4\ \ ed$ è:

$$f(x) = -A\cos(kx) = -2\cos(4x)$$

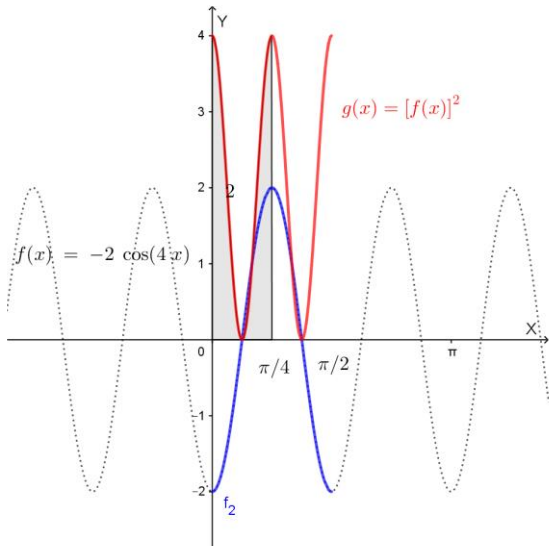
**d)**

Presi $A = 2$ e $k = 4$, determinare l'area delimitata dal grafico della funzione $g(x) = [f(x)]^2$ e dall'asse delle ascisse in un periodo. Cosa rappresentano, per il grafico della $g(x)$, i punti di flesso della $f(x)$?

Risulta, come già visto): $\boldsymbol{f(x) = -2\cos(4x)}$ che ha il seguente grafico:




La funzione g e la regione di cui si chiede l'area sono indicate nella figura seguente:




Osserviamo che i punti di flesso della f, che sono anche gli zeri della f, rappresentano punti di minimo per la g, e tali minimi sono uguali a zero (d'altronde, essendo la funzione g un quadrato, risulta $g \geq 0$).

Osserviamo che:

$g(x) = [f(x)]^2 = [-2\cos(4x)]^2 = 4\cos^2(4x) = 4\left[\frac{1+\cos(8x)}{2}\right] = 2 + 2\cos(8x)$: g ha quindi periodo $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, che è la metà del periodo della f.

L'area della regione richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 + 2\cos(8x)]\,dx = \left[2x + \frac{1}{4}\sin(8x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 0 - (0+0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\ u^2$$

***N.B.*** Se il periodo richiesto è quello della f (che è $\frac{\pi}{2}$) l'area è uguale a $2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\ u^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri