LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO AUSTRALE - QUESTIONARIO

Q1

Determinare, giustificando la risposta, tutti i possibili i valori di a, b, c in modo tale che si abbia:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^b + 8x^4 + cx^3 + 7}{13x^2 + 3x^3 - 5} = 3$$

Essendo il denominatore asintotico a $3x^3$, affinché il limite sia 3 il numeratore deve essere asintotico a $9x^3$.

Quindi deve essere $c = 9, a = -8 \;\; e \;\; b = 4$, in modo che il numeratore sia uguale a $9x^3 + 7$.

Q2

Determinare le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali della funzione

$$f(x) = \int_4^x \left(3^{5t-2t^2} - 1\right) dt.$$

La funzione $f(x)$ è continua e derivabile e risulta: $f'(x) = 3^{5x-2x^2} - 1$.

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi studiamo il segno della derivata prima:

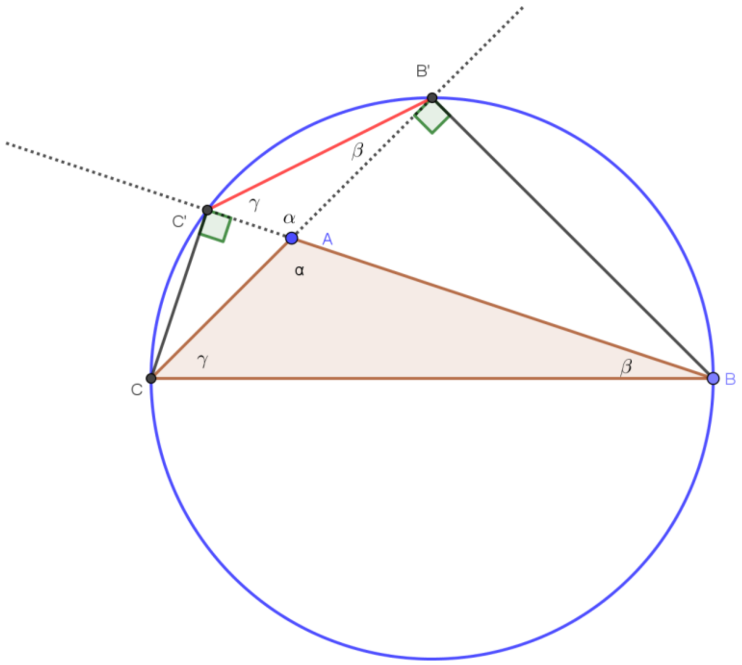
$f'(x) = 3^{5x-2x^2} - 1 \geq 0 \quad se \quad 3^{5x-2x^2} \geq 1\,,\;\; 5x - 2x^2 \geq 0,\;\; 2x^2 - 5x \leq 0\,, \qquad 0 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$

Quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{5}{2}$ e decrescente per $x < 0 \;\; vel \;\; x > \frac{5}{2}$.

Pertanto $x = 0$ è punto di minimo relativo, $x = \frac{5}{2}$ è punto di massimo relativo.

Q3

Assegnato un triangolo ABC, ottusangolo in A, siano B' e C', rispettivamente, i piedi delle altezze condotte dai vertici B e C. Dimostrare che il quadrilatero $BB'C'C$ è inscrivibile in una circonferenza e che i triangoli ABC e $AB'C'$ sono simili.



Essendo gli angoli CC'B e CB'B retti, C' e B' appartengono alla semicirconferenza di diametro BC, perciò BB'C'C è inscritto nella circonferenza di diametro BC.

L'angolo CB'C' è congruente all'angolo CBC' perché insistono sullo stesso arco CC'; analogamente l'angolo BC'B' è congruente all'angolo BCB', perché insistono sullo stesso arco BB'.

Perciò i triangoli ABC e AB'C' sono simili avendo tutti gli angoli congruenti.

Q4

Assegnati nello spazio i punti $A(1,0,-1)$ e $B(-3,-2,0)$, sia r la retta passante per A e B. Scrivere l'equazione del piano π, passante per il punto $P(-1,3,4)$ e perpendicolare a r. Determinare le coordinate del punto Q, simmetrico di P rispetto a r.

Una terna di parametri direttori sono: $l = -3 - 1 = -4, m = -2 - 0 = -2, n = 0 - (-1) = 1$. La retta r ha quindi equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Il piano π perpendicolare ad r e passante per P ha equazione: $-4(x+1) - 2(y-3) + (z-4) = 0$, quindi:

$\pi: -4x - 2y + z - 2 = 0, \qquad 4x + 2y - z + 2 = 0$

Il simmetrico di P rispetto ad r appartiene al piano π ed è il simmetrico di P rispetto al punto S di intersezione del piano con la retta. Per trovare S intersechiamo il piano con la retta:

$$4(1-4t)+2(-2t)-(-1+t)+2=0\,,-21t+7=0,\qquad t=\frac{1}{3}$$

Sostituendo nelle equazioni di r otteniamo: $S=\left(-\frac{1}{3};\,-\frac{2}{3};\,-\frac{2}{3}\right)$.

Risulta poi:

$$x_Q=2x_S-x_P=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}\,,\;\; y_Q=2y_S-y_P=-\frac{4}{3}-3=-\frac{13}{3}\,, z_Q=2z_S-z_P=-\frac{4}{3}-4=-\frac{16}{3}$$

Perciò il simmetrico Q di P rispetto ad r ha coordinate: $Q=\left(\frac{1}{3};\,-\frac{13}{3};\,-\frac{16}{3}\right)$.

Q5

Una scatola contiene 3 palline gialle e 4 blu; una seconda scatola contiene 2 palline blu e 4 gialle. Una persona estrae a sorte 2 palline dalla prima scatola e le mette nella seconda. A questo punto, un'altra persona estrae a sorte 2 palline dalla seconda scatola e le rimette nella prima. Qual è la probabilità che, alla fine, in ciascuna delle due scatole il numero di palline gialle e blu sia lo stesso che all'inizio?

Indichiamo con $p_1(GG), p_1(GB), p_1(BB)$ le probabilità di estrarre dalla prima urna due palline gialle, una gialla ed una blu e due blu. Con lo stesso significato indichiamo con indice 2 le probabilità di estrazione dalla seconda urna (dopo che sono state inserite le palline estratte dalla prima).

La probabilità p richiesta è data da:

$$p_1(GG)\cdot p_2(GG)+p_1(GB)\cdot p_2(GB)+p_1(BB)\cdot p_2(BB)$$

Ma risulta:

$$p_1(GG)=\frac{C_{3,2}}{C_{7,2}}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}\,,\;\; p_2(GG)=\frac{C_{6,2}}{C_{8,2}}=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}\,,\; p_1(GB)=\frac{3\cdot 4}{C_{7,2}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}\,,$$

$$p_2(GB)=\frac{5\cdot 3}{C_{8,2}}=\frac{15}{28}\,,\;\; p_1(BB)=\frac{C_{4,2}}{C_{7,2}}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}\,,\;\; p_2(BB)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

Quindi:

$$p=\frac{1}{7}\cdot\frac{15}{28}+\frac{4}{7}\cdot\frac{15}{28}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{14}=\frac{1}{7}\cdot\frac{15}{28}+\frac{4}{7}\cdot\frac{15}{28}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{14}=\frac{87}{196}\cong 0.444=44.4\ \%$$

Q6

Una particella α (due protoni e due neutroni) entra in un condensatore piano attraverso un foro praticato sull'armatura negativa, perpendicolarmente a questa, con velocità $v_0 = 6.93 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$. La distanza tra le armature è $d = 10.0cm$ ed esse sono soggette ad una d.d.p. di $200V$. Quale distanza percorrerà la particella all'interno del condensatore prima di invertire il suo moto? (considerare la massa del neutrone uguale a quella del protone)

La particella inverte il suo moto quando la sua velocità si annulla.

Utilizziamo il Principio di conservazione dell'energia.

Indicati con $K_i\ ed\ \ U_i$ le energie cinetica e potenziale iniziali e con $K_f\ ed\ \ U_f$ quelle in cui la velocità si annulla, posto come livello zero per l'energia potenziale la posizione iniziale della particella, e indicato con s lo spazio percorso dalla particella quando si ferma per invertire il suo moto, abbiamo:

$$K_i + U_i = K_f + U_f\ ,\quad \frac{1}{2}mv_0^2 = qEs + mgs \cong qEs$$

(osserviamo che l'energia potenziale gravitazionale mgs può essere trascurata rispetto all'energia potenziale elettrica). Quindi:

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{qE} = \frac{2m_P v_0^2}{2e\left(\frac{\Delta V}{d}\right)} = \frac{m_P v_0^2}{e\left(\frac{\Delta V}{d}\right)} = \frac{1.673 \cdot 10^{-27}(6.93 \cdot 10^4)^2}{1.602 \cdot 10^{-19}\left(\frac{200}{0.1}\right)}\ m \cong 0.0250\ m \cong 2.50\ cm$$

Quindi la particella inverte il moto dopo aver percorso $2.5\ cm$.

N.B. Allo stesso risultato si può pervenire utilizzando le leggi della dinamica.

La particella è soggetta alla forza elettrica costante diretta verso l'armatura negativa di modulo

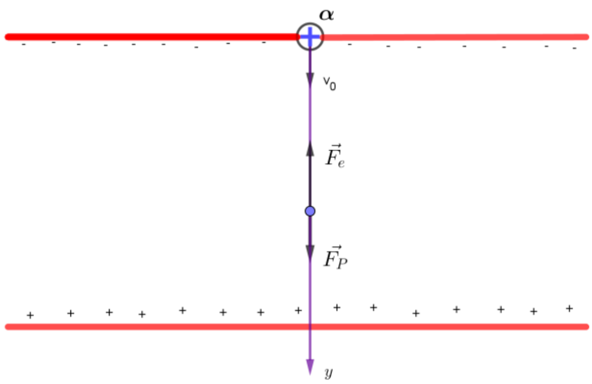
$$F_e = qE,\ dove\ q = +2e\ \ ed\ E = \frac{\Delta V}{d};\ \ quindi\ F_e = +2e \cdot \frac{\Delta V}{d} = 2(1.602 \cdot 10^{-19}C) \cdot \frac{200V}{0.1\ m} = 6.4 \cdot 10^{-16}N$$

La particella è anche soggetta alla forza peso costante diretta verso l'armatura positiva, di modulo:

$F_P = mg, essendo\ m\ pari\ a\ 4\ volte\ la\ massa\ del\ protone;$

$$F_P = 4(1.673 \cdot 10^{-27}kg)\left(9.81\frac{N}{m}\right) = 6.6 \cdot 10^{-26}\ N$$

(osserviamo che tale forza è trascurabile rispetto alla forza elettrica).



La velocità v della particella è tale che:

$v^2 - v_0^2 = 2as$, dove s è lo spazio percorso. Quindi: $s = -\frac{v_0^2}{2a}$ (notiamo che il moto è uniformemente decelerato, quindi $a < 0$).

Dobbiamo quindi trovare l'accelerazione della particella.
Dalla seconda legge della dinamica $F = ma$, tenendo presente quanto detto sulle forze agenti sulla particella e scegliendo un sistema di riferimento con l'asse positivo verso il basso, otteniamo:

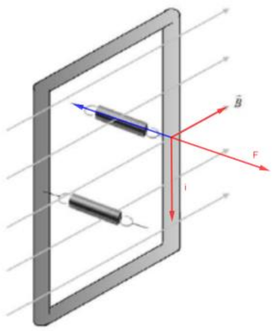
$$F_P - F_e = ma, \qquad trascurando\ F_P: \quad a = \frac{-F_e}{4m_p} = \frac{-6.4 \cdot 10^{-16} N}{4(1.673 \cdot 10^{-27} kg)} \cong -9.6 \cdot 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{\left(6.93 \cdot \frac{10^4 m}{s}\right)^2}{-2\left(9.6 \cdot 10^{10} \frac{m}{s^2}\right)} = 2.50 \cdot 10^{-2} m = 2.50\ cm$$

Come visto precedentemente, la particella inverte il moto dopo aver percorso 2.5 cm.

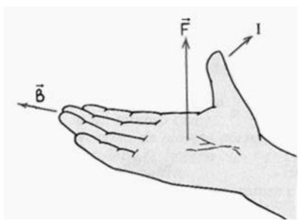
Q7

Una spira quadrata di lato $l = 20cm$ è percorsa da una corrente di intensità $i = 0.50A$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme di intensità $B = 0.10T$ e direzione parallela al piano della spira stessa. La spira è tenuta in equilibrio da una coppia di molle di costante elastica $K = 2N/m$ come in figura. Determinare l'allungamento delle molle e stabilire il verso della corrente.



Il campo magnetico produce sui lati della spira ad esso perpendicolari la forza:

$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$, essendo $\vec{l}$ il vettore con direzione e verso della corrente e modulo pari alla lunghezza del lato della spira. Dalla configurazione delle molle segue (secondo la regola della mano destra) che la corrente circola in senso orario, poiché la forza generata dal campo magnetico deve essere uguale ed opposta a quella elastica.



L'intensità della forza che agisce su ciascuna delle due molle è quindi pari a:

$F = Bil = (0.1\ T)(0.50\ A)(0.2\ m) = 0.01\ N$

Essendo in modulo $F = kx,\ si\ ha$: $x = \frac{F}{k} = \frac{0.01\ N}{2\ N/m} = 0.005\ m = 5\ mm$

Quindi l'allungamento delle molle è pari a 5 mm.

Q8

In un dato sistema di riferimento, il potenziale elettrico varia secondo la legge $V(x) = Ax^2 e^{-Bx}$ con A e B costanti fisiche positive, di cui si chiedono le unità di misura. Determinare la posizione in cui il modulo del campo elettrostatico è massimo ed il valore che assume in tale posizione.

Siccome Bx deve essere un numero puro e x ha le dimensioni di una lunghezza, si ha:

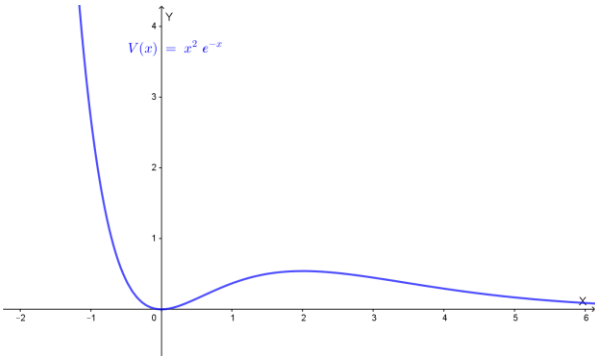
$[B] = [L^{-1}]$: B ha per unità di misura m^{-1} .

Per quanto riguarda la costante A deve essere:

$[A] = [V][L^{-2}] = [EL][L^{-2}] = [EL^{-1}] = [FQ^{-1}L^{-1}] = [MLT^{-2}][I^{-1}T^{-1}][L^{-1}] = [M][T^{-3}][I^{-1}]$

Quindi A ha per unità di misura $kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1} = \frac{kg}{A \cdot s^3}$.

Ponendo per esempio $A = 1\ e\ B = 1$ risulta $V(x) = x^2\ e^{-x}$, il cui grafico è del tipo:



Determiniamo ora il massimo del modulo del campo elettrostatico. Risulta:

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -V'(x) = -(2Ax\ e^{-Bx} - ABx^2\ e^{-Bx}) = Ae^{-Bx}(Bx^2 - 2x)$$

Osserviamo che questa funzione è continua e derivabile su tutto R e che per $x \to -\infty$ tende $a + \infty$ e per $x \to +\infty$ tende a 0^+.

Studiano $E'(x)$.

$E'(x) = -ABe^{-Bx}(Bx^2 - 2x) + Ae^{-Bx}(2Bx - 2) = Ae^{-Bx}(-B^2x^2 + 2Bx + 2Bx - 2) =$

$= -Ae^{-Bx}(B^2x^2 - 4Bx + 2) \geq 0 \quad se \quad B^2x^2 - 4Bx + 2 \leq 0,$

Risulta: $\frac{\Delta}{4} = 4B^2 - 2B^2 = 2B^2, quindi$: $x = \frac{2B \pm B\sqrt{2}}{B^2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{B}$

Quindi $E'(x) \geq 0\ \ se\ \ \frac{2-\sqrt{2}}{B} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{2}}{B}$. Pertanto E risulta decrescente per $x < \frac{2-\sqrt{2}}{B}$, crescente per $\frac{2-\sqrt{2}}{B} < x < \frac{2+\sqrt{2}}{B}$ e decrescente per $x > \frac{2+\sqrt{2}}{B}$: $x = \frac{2+\sqrt{2}}{B} \cong \frac{3.41}{B}$ è punto di massimo (relativo) per $E(x)$.
Risulta:

$$E\left(\frac{2+\sqrt{2}}{B}\right) = Ae^{-B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{B}\right)}\left(B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{B}\right)\right) = Ae^{-2-\sqrt{2}}\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{B} - \frac{4+2\sqrt{2}}{B}\right) =$$

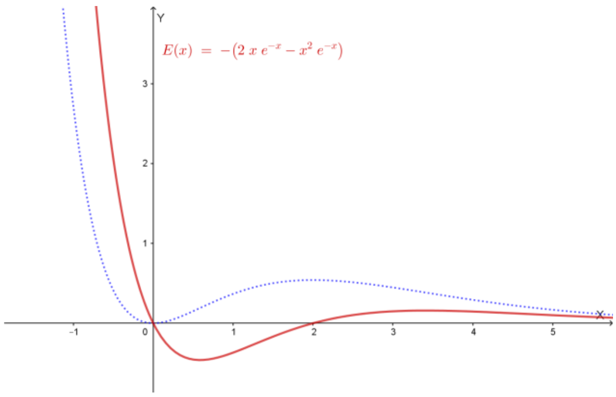
$$= \frac{A}{B}(2+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \cong 0.16\frac{A}{B}$$

$x = \frac{2-\sqrt{2}}{B}$ è punto di minimo (relativo e assoluto) per $E(x)$ e risulta:

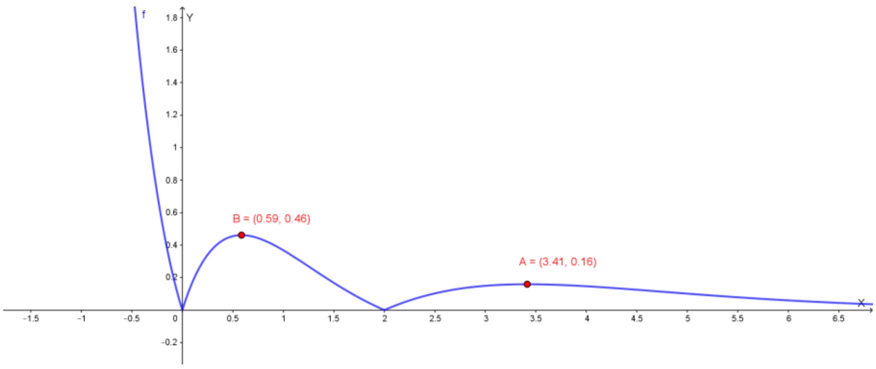
$$E\left(\frac{2-\sqrt{2}}{B}\right) = Ae^{-B\left(\frac{2-\sqrt{2}}{B}\right)}\left(B\left(\frac{2-\sqrt{2}}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{B}\right)\right) = Ae^{-2+\sqrt{2}}\left(\frac{6-4\sqrt{2}}{B} - \frac{4-2\sqrt{2}}{B}\right) =$$

$$= \frac{A}{B}(2-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \cong -0.46\frac{A}{B}$$

La funzione $E(x)$, ponendo per semplicità $A = 1\ \ e\ \ B = 1$, ha grafico del tipo:



La funzione $|E(x)|$ ha grafico del tipo:



Quindi in valore assoluto il minimo relativo supera il massimo relativo, pertanto, supponendo $x \geq 0$ e osservato che $E(0) = 0$, il modulo del campo elettrostatico è massimo per $x = \frac{2-\sqrt{2}}{B}$ ed il suo massimo valore è $\left|\frac{A}{B}(2-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}\right| \cong \left|-0.46\frac{A}{B}\right| \cong 0.46\frac{A}{B}$.

N.B. Considerando x qualsiasi, come il testo fa supporre, il modulo del campo elettrostatico non ammetterebbe massimo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri