



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02, EA02 – SCIENTIFICO  
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

**Tema di:** MATEMATICA e FISICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti.*

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione

$$E(x) = \frac{-Ax}{(1-x^2)^2}$$

dove  $A$  è una costante positiva.

- Descrivere l'andamento della funzione  $E(x)$  e rappresentarne il grafico, individuandone gli asintoti, la simmetria ed il punto di flesso  $F$ . Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in  $F$ .
- Determinare i valori dei seguenti integrali:

$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^0 E(x) dx$$

$$C = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} E(x) dx$$

$$D = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} |E(x)| dx$$

specificando il significato geometrico di ciascuno di essi.

- Considerato un sistema di riferimento ortogonale  $Oxy$ , dove le lunghezze sono espresse in metri (m), si pongono due cariche uguali positive puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  nei punti  $P_1(-1, 0)$  e  $P_2(1, 0)$ . Le quantità di carica sono espresse in coulomb (C). Dimostrare che il modulo del campo elettrico nei punti di coordinate  $(x, 0)$ , con  $-1 < x < 1$ , è espresso da  $|E(x)|$ , per un'opportuna scelta della costante  $A$ . Effettuare un'analisi dimensionale di  $A$  e spiegare qual è il significato fisico dell'integrale  $B$  calcolato al punto 2.
- Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle cariche  $q_1$  e  $q_2$  rispettivamente nei punti  $S(0, 1)$  e  $T(0, \sqrt{3})$ . Quali sono i valori del potenziale elettrostatico nei punti  $S$  e  $T$ ?



## *Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

### PROBLEMA 2

In uno dei possibili modelli per descrivere l'effetto della resistenza dell'aria in un moto di caduta libera, si suppone che il modulo della forza di attrito  $F$ , opposta alla forza peso, risulti

$$F = k \cdot [v(t)]^2$$

dove  $v(t)$  indica la velocità di caduta all'istante  $t$  e  $k$  è una costante positiva. Tutte le grandezze fisiche presenti sono espresse nelle unità di misura del S.I. Nell'ipotesi che tale modello sia applicabile, il modulo della velocità di caduta in ciascun istante è esprimibile con una funzione della forma

$$v(t) = h \frac{e^{bt} - 1}{e^{bt} + 1}$$

dove  $h$  e  $b$  sono opportune costanti positive.

- Determinare le unità di misura della costante  $k$ . Verificare che, in questo modello, l'accelerazione istantanea del corpo è espressa dalla funzione

$$a(t) = \frac{2 h b e^{bt}}{(e^{bt} + 1)^2}$$

mentre una legge oraria che può descrivere il moto del corpo è

$$s(t) = \frac{2h}{b} \cdot \ln(1 + e^{bt}) - ht$$

Utilizzando, per valori molto grandi di  $t$ , l'approssimazione  $1 + e^{bt} \simeq e^{bt}$ , mostrare che si ha  $s(t) \simeq ht$ . Inoltre, provare che la velocità è crescente e tende al valore limite  $h$ .

- Dopo aver verificato che l'accelerazione è decrescente e tende a 0 al trascorrere del tempo, fornire un'interpretazione fisica della situazione fin qui descritta.

Posto  $h = \sqrt{mg/k}$  e  $b = 2\sqrt{kg/m}$ , dove  $m$  indica la massa del corpo e  $g$  l'accelerazione di gravità, verificare che viene rispettato il 2° principio della dinamica. Dedurre, da quanto posto, che  $h$  e  $b$  hanno, rispettivamente, le dimensioni di una velocità e del reciproco di un tempo.

- Tracciare, indipendentemente dalla situazione fisica, il grafico  $\Gamma$  della funzione  $v(t)$  per  $t \in \mathbb{R}$ , specificandone la simmetria. Dedurre da esso, in modo qualitativo, il grafico della sua primitiva passante per il punto  $(0; \frac{2h}{b} \ln 2)$ . In particolare, stabilire se la primitiva ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, scriverne le equazioni, sempre considerando che, per  $t \rightarrow +\infty$ , si può ricorrere all'approssimazione  $1 + e^{bt} \simeq e^{bt}$ .

- Preso  $t_0 > 0$ , calcolare l'area  $A$  della regione  $R$  nel 1° quadrante che è delimitata dal grafico  $\Gamma$ , dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $t = t_0$ . Stabilire se, per  $t_0 \rightarrow +\infty$ , l'area  $A$  tende o meno ad un valore finito. Infine, preso  $\tau > 0$ , calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{-\tau}^{+\tau} a(t) dt$$

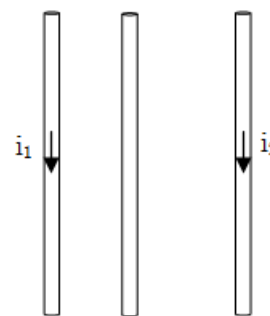
e stabilire il suo comportamento per  $\tau \rightarrow +\infty$ .



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

**QUESITI**

1. Assegnata la funzione  $f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{x}$ , mostrare che esiste un solo valore  $b > -3$  tale che nell'intervallo  $[-3, b]$  siano rispettate tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Determinare tale valore  $b$ .
2. Dopo aver verificato che la curva di equazione  $|y| + |x|^3 = 1$  è simmetrica sia rispetto all'asse  $x$  sia rispetto all'asse  $y$ , determinare l'area della regione piana delimitata da tale curva.
3. Dimostrare che, se in un parallelogramma si tracciano le due diagonali, esso viene suddiviso in quattro triangoli di area uguale. Discutere la validità o meno dell'affermazione inversa: se un quadrilatero convesso viene suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli di area uguale, allora esso è un parallelogramma.
4. Sono assegnati, nello spazio tridimensionale, i punti  $A(-1, 3, 2)$ ,  $B(3, 4, 2)$ ,  $C(5, 1, 4)$ ,  $D(1, 0, 4)$ . Dopo aver dimostrato che  $ABCD$  è un rombo, determinare l'area di tale rombo ed il raggio della circonferenza in esso inscritta.
5. Alberto e Barbara fanno un gioco: ognuno lancia contemporaneamente 5 dadi, con facce numerate da 1 a 6. Ciascun dado fa guadagnare un punto a chi lo ha lanciato se esce il numero 5 o il 6; le facce da 1 a 4 non fanno guadagnare punti. Vince chi, con i 5 dadi lanciati, realizza più punti. Qual è la probabilità che pareggino?
6. Un elettrone, un protone e una particella  $\alpha$  sono accelerati, da fermi, da una differenza di potenziale  $\Delta V$  e in seguito penetrano, nello stesso punto, in un campo magnetico  $\vec{B}$ , uniforme e perpendicolare alle velocità. Esprimere i raggi di curvatura delle traiettorie del protone e della particella  $\alpha$  in funzione del raggio di curvatura dell'elettrone. A parte l'entità dei raggi di curvatura, in cosa differiranno le traiettorie?
7. Due conduttori rettilinei, paralleli e complanari sono percorsi da correnti concordi di intensità  $I_1=4$  A e  $I_2=6$  A. I due conduttori sono fissati ad una distanza di 2 cm uno dall'altro. Determinare modulo, direzione e verso del campo magnetico nei punti del piano equidistanti dai due conduttori. Un terzo conduttore rettilineo, attraversato da una corrente  $I_3$ , libero di muoversi lateralmente, viene posto tra i primi due come in figura. Calcolare la posizione nella quale quest'ultimo conduttore resta in equilibrio. Determinare il verso della corrente  $I_3$  in modo che la precedente posizione di equilibrio sia stabile.





*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

8. Considerare due sistemi di riferimento inerziali  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  con assi paralleli.  $\mathcal{R}'$  si muove con velocità  $v > 0$ , rispetto a  $\mathcal{R}$ , lungo l'asse  $x$ . Inoltre, quando  $t = t' = 0$ , le origini  $O, O'$  dei due sistemi di riferimento coincidono. Si dimostra che la velocità  $\vec{w}' = (w'_x, w'_y, w'_z)$  di una particella rispetto a  $\mathcal{R}'$  è legata alla velocità  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  della medesima particella rispetto a  $\mathcal{R}$  attraverso le seguenti relazioni (trasformazioni delle velocità):

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \quad w'_y = \frac{w_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \quad w'_z = \frac{w_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}.$$

Mostrare, utilizzando le trasformazioni delle velocità, che se  $\vec{w} \equiv (0, c, 0)$  o  $\vec{w} \equiv (c, 0, 0)$ , dove  $c$  è la velocità di un raggio luminoso nel vuoto, allora il modulo della velocità  $\vec{w}'$  vale  $c$ . Questo risultato poteva essere dedotto a priori senza effettuare alcun calcolo?

COSTANTI FISICHE

carica elementare	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	$m_p$	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa particella alfa	$m_\alpha$	$6,645 \cdot 10^{-27}$ kg
costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.