LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO BOREALE

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione

$$E(x)=\frac{-Ax}{(1-x^2)^2}$$

dove A è una costante positiva.

a)

Descrivere l'andamento della funzione $E(x)$ e rappresentarne il grafico, individuandone gli asintoti, la simmetria ed il punto di flesso F. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in F.

Dominio: $x\neq\pm1\,,\ quindi\!:\quad -\infty<x<-1\,,\ -1<x<1,\ 1<x<+\infty$

La funzione è positiva per x<0, negativa per x>0 e si annulla per x=0.

Essendo $E(-x)=-E(x)$ la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi).

Calcoliamo i limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}E(x)=0^{\mp}$: $y=0$ asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$

$\lim_{x\to1^{\pm}}E(x)=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to(-1)^{\pm}}E(x)=+\infty:\quad x=\pm1\ \ asintoti\ verticali.$

Studio della derivata prima:

$$E'=\frac{-A(1-x^2)^2+Ax[2(-2x)(1-x^2)]}{(1-x^2)^4}=\frac{A(1-x^2)(-1+x^2-4x^2)}{(1-x^2)^4}=\frac{A(1-x^2)(-1-3x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$E'=\dfrac{-A(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}>0\ \ se\ \ 1-x^2<0\!:x<-1\ vel\ x>1\!:in\ tali\ intervalli\ il\ grafico$ è $crescente;$

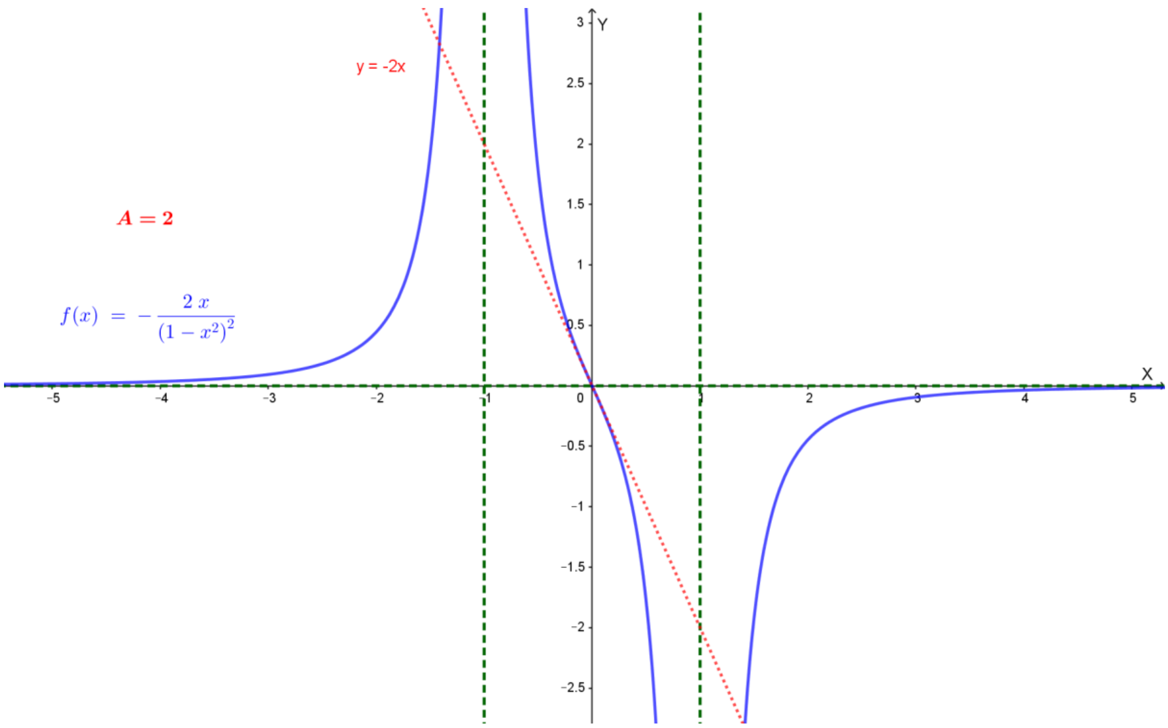
$non\ ci\ sono\ massimi$ nè $minimi.$

Studio della derivata seconda:

$$E''(x)=\frac{-6Ax(1-x^2)^3+A(1+3x^2)[-6x(1-x^2)^2]}{(1-x^2)^6}=\frac{-6Ax(1-x^2+1+3x^2)}{(1-x^2)^4}=$$

$\frac{-6Ax(2+2x^2)}{(1-x^2)^4}\geq0\ \ se\ \ x\leq0\,,nel\ dominio$: il grafico volge quindi la concavità verso l'alto per $x<0$ e verso il basso per $x>0$ (nel dominio): $x=0$ è $punto\ di\ flesso$: $F=(0;0)$.

Grafico della funzione (per esemplificare abbiamo posto A=2):



Scriviamo ora l'equazione della tangente inflessionale:

$E'(0) = -A, \qquad quindi: \ y - 0 = -A(x - 0), \ \ y = -Ax: \ tangente \ in \ F.$

b)

Determinare i valori dei seguenti integrali:

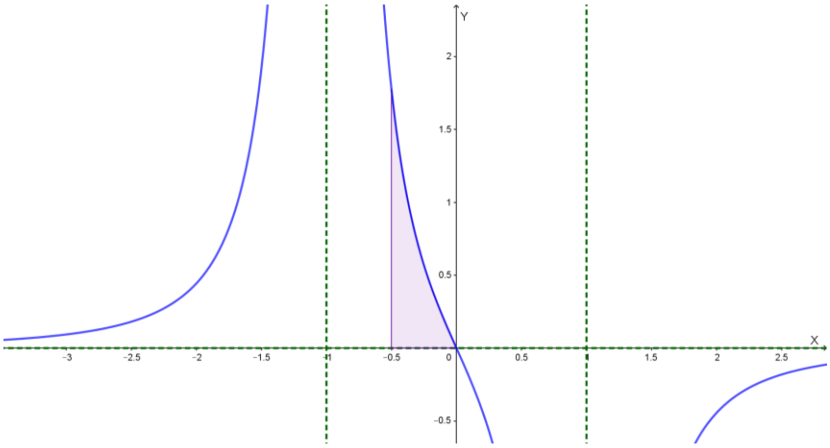
$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} E(x)\, dx \qquad\qquad C = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} E(x)\, dx \qquad\qquad D = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} |E(x)|\, dx$$

specificando il significato geometrico di ciascuno di essi.

$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} E(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -Ax\,(1-x^2)^{-2}\, dx = \frac{A}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} -2x\,(1-x^2)^{-2}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{-1}}{-1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{A}{2}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{A}{2}\left(1-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}A\right) \ u^2 = B$$

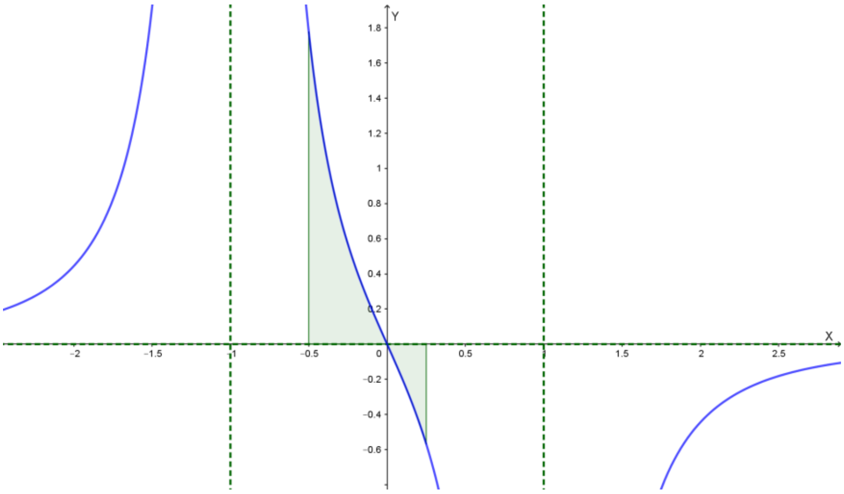
Questo integrale rappresenta geometricamente l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione E(x), dall'asse x e dalla retta $x = -\frac{1}{2}$.



Calcoliamo il secondo integrale:

$$C=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} E(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2}\,dx=-\frac{A}{2}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}=-\frac{A}{2}\left(\frac{16}{15}-\frac{4}{3}\right)=-\frac{A}{2}\left(\frac{-4}{15}\right)=\left(\frac{2}{15}A\right)\ u^2=C$$

Questo integrale rappresenta geometricamente la somma fra l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione E(x), dall'asse x e dalla retta $x=-\frac{1}{2}$ e l'opposto dell'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione E(x), dall'asse x e dalla retta $x=\frac{1}{4}$.

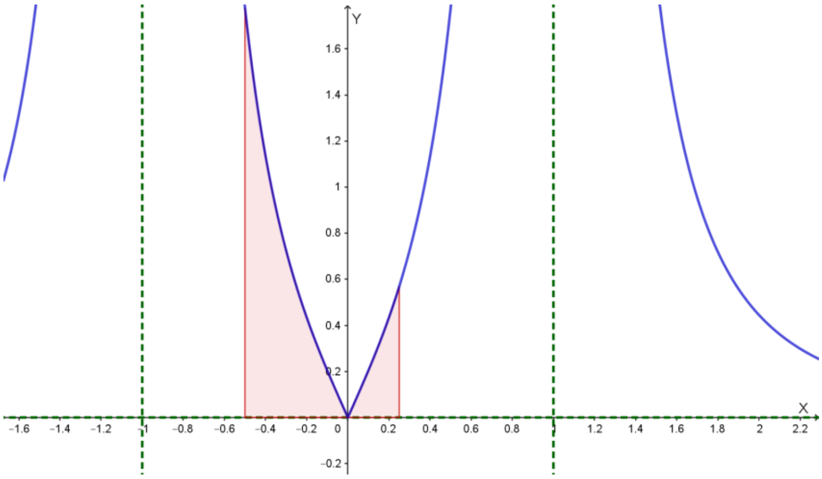


Calcoliamo il terzo integrale:

$$D=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} |E(x)|\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} E(x)\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{4}} -E(x)\,dx=\frac{1}{6}A-\int_{0}^{\frac{1}{4}} E(x)\,dx=\frac{1}{6}A+\frac{A}{2}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]_{0}^{\frac{1}{4}}=$$

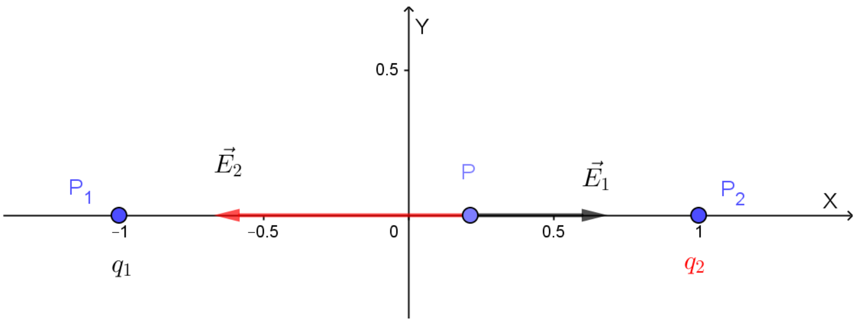
$$=\frac{1}{6}A+\frac{A}{2}\left(\frac{16}{15}-1\right)=\frac{1}{6}A+\frac{1}{30}A=\left(\frac{1}{5}A\right)\ u^2=D$$

Questo integrale rappresenta geometricamente la somma fra l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione E(x), dall'asse x e dalla retta $x=-\frac{1}{2}$ e l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione -E(x), dall'asse x e dalla retta $x=\frac{1}{4}$.



c)

Considerato un sistema di riferimento ortogonale Oxy, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), si pongono due cariche uguali positive puntiformi q_1 *e* q_2 nei punti $P_1(-1,0)$ *e* $P_2(1,0)$. Le quantità di carica sono espresse in coulomb (C). Dimostrare che il modulo del campo elettrico nei punti di coordinate $(x, 0)$, con $-1 < x < 1$, è espresso da $|E(x)|$, per un'opportuna scelta della costante A.
Effettuare un'analisi dimensionale di A e spiegare qual è il significato fisico dell'integrale B calcolato al punto b.



I moduli dei campi elettrici generati nel punto $P=(x,0)$ compreso fra P_1 *e* P_2 dalle cariche uguali e positive q_1 *e* q_2 sono rispettivamente:

$$E_1=\frac{kq_1}{(x+1)^2}\ ,\quad E_2=\frac{kq_2}{(1-x)^2}$$

Posto $q_1=q_2=q$, *i*l modulo del campo elettrico risultante in P è:

$$|E_2-E_1|=\left|\frac{kq_2}{(1-x)^2}-\frac{kq_1}{(x+1)^2}\right|=kq\left|\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right|=kq\left|\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right|=$$

$$=4kq\left|\frac{x}{(1-x^2)^2}\right|=\left|\frac{4kqx}{(1-x^2)^2}\right|=|E(x)|\,,\quad con\ A=4kq\ ,essendo\ k\ la\ costante\ di\ Coulomb.$$

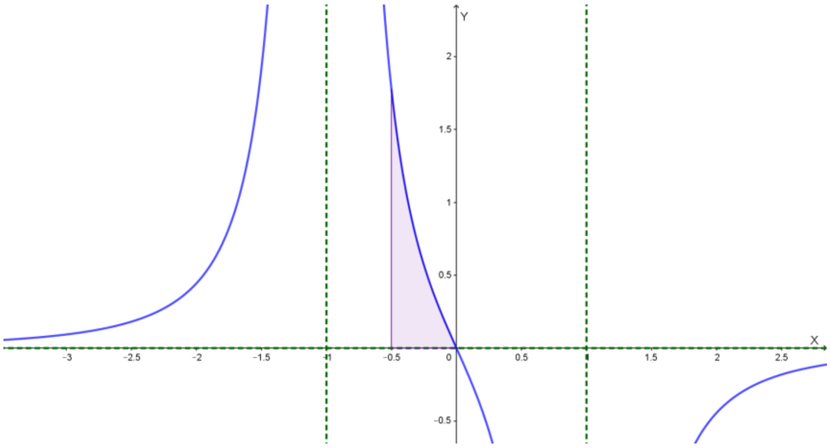
Calcoliamo le dimensioni di A:

$$[A]=[4kq]=[kq]=\left[\frac{Fs^2}{q^2}\cdot q\right]=\left[\frac{Fs^2}{q}\right]=\left[\frac{MLT^{-2}L^2}{IT}\right]=[ML^3T^{-3}I^{-1}]=[A]$$

L'unità di misura di A è quindi: $\frac{kg\cdot m^3}{s^3\cdot A}$.

Vediamo ora qual è il significato dell'integrale B calcolato precedentemente.

$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} E(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} |E(x)|\,dx$$



Ricordiamo la relazione fra il potenziale V, il campo elettrico E e la distanza x dal punto in cui è collocata la carica che genera il campo:

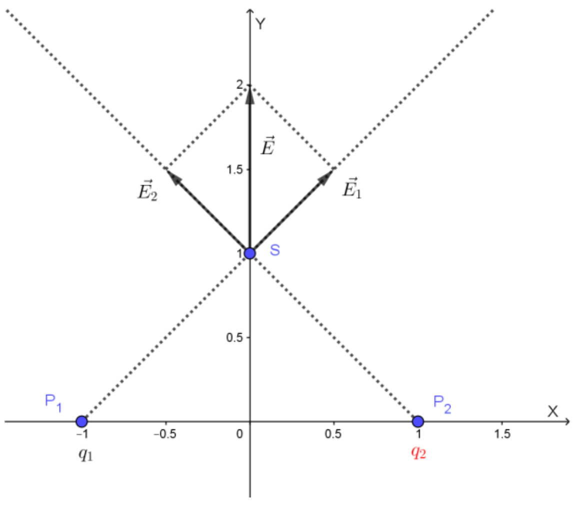
$$E = \frac{dV}{dx} \;, \quad dV = E\,dx\,, \quad \int_{x_1}^{x_2} E(x)\,dx = V \;\; (con\ V\ \ d.d.p. fra\ i\ punti\ di\ ascissa\ x_1\ ed\ \ x_2)$$

Quindi: $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} |E(x)|\,dx$ rappresenta la differenza di potenziale fra i punti di ascissa $-\frac{1}{2}\ e\ 0$.

d)

Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle cariche $q_1\ e\ q_2$ rispettivamente nei punti $S(0,1)\ e\ T(0,\sqrt{3})$.
Quali sono i valori del potenziale elettrostatico nei punti S e T?

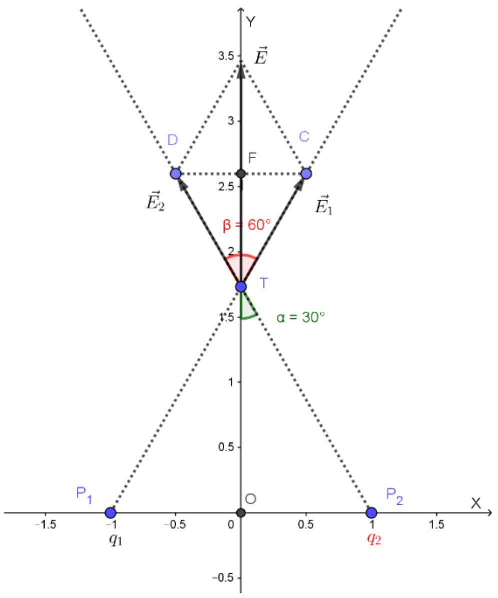
Studiamo il campo elettrico in S:



Dopo aver notato che le direzioni di $\overrightarrow{E_1}$ *ed* $\overrightarrow{E_2}$ sono perpendicolari (essendo l'angolo P_1SP_2 retto) possiamo concludere che il campo elettrostatico generato dalle cariche q_1 *e* q_2 nel punto $S(0,1)$ ha la direzione ed il verso dell'asse y e modulo dato dalla diagonale del quadrato di lato E_1. Risulta:

$E_1 = k\frac{q_1}{P_1S^2} = k\frac{q}{(\sqrt{2})^2} = k\frac{q}{2}$, $\quad E = E_1 \cdot \sqrt{2} = \frac{kq\sqrt{2}}{2}$

Studiamo il campo elettrico in $T(0, \sqrt{3})$.



Osserviamo che l'angolo $OTP_2 = 30°$, quindi CTD=60°. Il triangolo CTD è quindi equilatero. Il modulo di E vale quindi:

$$E = 2\,TF = 2\,E_1\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,E_1 = \sqrt{3}\left(\frac{kq}{P_1T^2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{kq}{4}\right) = E$$

La direzione ed il verso di E sono quelli dell'asse y.

Calcoliamo ora il valore del potenziale elettrostatico in S e T, ricordando che il potenziale elettrostatico V generato da una carica puntiforme q in un punto a distanza R dalla carica è dato da $V = \frac{kq}{R}$.

Risulta:

$$V(S) = 2\left(\frac{kq}{P_1S}\right) = 2\left(\frac{kq}{\sqrt{2}}\right) = kq\sqrt{2}\,.$$

$$V(T) = 2\left(\frac{kq}{P_1T}\right) = 2\left(\frac{kq}{2}\right) = kq\,.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria