LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO BOREALE

PROBLEMA 2

In uno dei possibili modelli per descrivere l'effetto della resistenza dell'aria in un moto di caduta libera, si suppone che il modulo della forza di attrito F, opposta alla forza peso, risulti

$$F = k \cdot [v(t)]^2$$

dove $v(t)$ indica la velocità di caduta all'istante t e k è una costante positiva. Tutte le grandezze fisiche presenti sono espresse nelle unità di misura del S.I. Nell'ipotesi che tale modello sia applicabile, il modulo della velocità di caduta in ciascun istante è esprimibile con una funzione della forma

$$v(t) = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}$$

dove h e b sono opportune costanti positive.

a)

Determinare le unità di misura della costante k. Verificare che, in questo modello, l'accelerazione istantanea del corpo è espressa dalla funzione

$$a(t) = \frac{2\,h\,b\,e^{bt}}{(e^{bt}+1)^2}$$

mentre una legge oraria che può descrivere il moto del corpo è

$$s(t) = \left[\frac{2h}{b}\cdot ln(1 + e^{bt}) - ht\right]$$

Utilizzando, per valori molto grandi di t, l'approssimazione $1 + e^{bt} \simeq e^{bt}$, mostrare che si ha $s(t) \simeq ht$. Inoltre, provare che la velocità è crescente e tende al valore limite h.

Determiniamo l'unità di misura della costante k:

$$[k] = \left[\frac{F}{v^2}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2\cdot T^{-2}}\right] = [ML^{-1}]\,, \qquad quindi\ l'unità\ di\ misura\ di\ k\ è\ \frac{kg}{m}.$$

Determiniamo ora l'accelerazione istantanea del corpo.

Essendo $v(t) = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}$, si ha:

$$a(t) = v'(t) = h\frac{be^{bt}(e^{bt}+1)-(e^{bt}-1)(be^{bt})}{(e^{bt}+1)^2} = h\frac{be^{bt}(e^{bt}+1-e^{bt}+1))}{(e^{bt}+1)^2} = \frac{2hbe^{bt}}{(e^{bt}+1)^2} = a(t)$$

Ricordiamo che $s'(t) = v(t)$ e nel nostro caso:

$$s'(t) = D\left[\frac{2h}{b} \cdot ln(1 + e^{bt}) - ht\right] = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1} = v(t)$$

Quindi $s(t) = \left[\frac{2h}{b} \cdot ln(1 + e^{bt}) - ht\right]$ è una legge oraria che può descrivere il moto del corpo.

La legge oraria può essere ricavata direttamente notando che, essendo $v(t) = \frac{ds}{dt}$, risulta:

$$ds = v(t)dt\,, \qquad quindi:\ s = \int v(t)dt = \int h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}dt = h\int \frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}dt$$

Risolviamo l'integrale:

$$\int \frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}dt$$

Poniamo $e^{bt} = z,\quad bt = \ln z\,,\ bdt = \frac{1}{z}dz\,,\ dt = \frac{1}{bz}dz\ quindi$:

$$\int \frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}dt = \int \frac{z-1}{bz(z+1)}\,dz = \frac{1}{b}\int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz$$

$$\frac{z-1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+Bz}{z(z+1)} = \frac{z(A+B)+A}{z(z+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases};\ \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = \int \left(-\frac{1}{z}+\frac{2}{z+1}\right)dz = -\ln|z| + 2\ln|z+1| + C = ln\left(\frac{(z+1)^2}{|z|}\right) + C =$$

$$= 2\ln|z+1| - \ln|z| + C = 2\ln\left|e^{bt}+1\right| - \ln\left|e^{bt}\right| + C = 2\ln\left(e^{bt}+1\right) - bt + C$$

Quindi:

$$s(t) = h\int \frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}dt = \frac{h}{b}\left[2\ln\left(e^{bt}+1\right) - bt + C\right], e\ ponendo\ C = 0\ si\ ha:$$

$$s(t) = \frac{2h}{b}\ln\left(e^{bt}+1\right) - ht$$

Utilizzando l'approssimazione $1 + e^{bt} \simeq e^{bt}$ per valori molto grandi di t (in effetti, se $t \to +\infty\ si\ ha{:}\ 1 + e^{bt} \sim e^{bt}$), si ha:

$$s(t) = \frac{2h}{b} \cdot ln(1 + e^{bt}) - ht \cong \frac{2h}{b}\ln\left(e^{bt}\right) - ht = \frac{2h}{b}(bt) - ht = ht, \qquad c.v.d.$$

Vediamo ora quando $v(t)$ è crescente studiando la sua derivata.

$v'(t) = a(t) = \frac{2\,h\,b\,e^{bt}}{\left(e^{bt}+1\right)^2} > 0\ \ per\ ogni\ valore\ di\ t$: la velocità è quindi sempre crescente.

Inoltre, se $t \to +\infty$, risulta:

$$v(t) = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1} \sim h\frac{e^{bt}}{e^{bt}} = h,\ \ quindi\ \ v(t) \to h \quad per\ \ t \to +\infty\,.$$

b)

Dopo aver verificato che l'accelerazione è decrescente e tende a 0 al trascorrere del tempo, fornire un'interpretazione fisica della situazione fin qui descritta.
Posto $h = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ e $b = \sqrt{\frac{kg}{m}}$, dove m indica la massa del corpo e g l'accelerazione di gravità, verificare che viene rispettato il 2° principio della dinamica. Dedurre, da quanto posto, che h e b hanno, rispettivamente, le dimensioni di una velocità e del reciproco di un tempo.

Verifichiamo che l'accelerazione è decrescente:

$a(t) = \frac{2\,h\,b\,e^{bt}}{(e^{bt}+1)^2}$; $a(t)$, sempre derivabile, è decrescente se $a'(t) \leq 0$.

$$a'(t) = 2hb\frac{b\,e^{bt}\left(e^{bt}+1\right)^2 - e^{bt}\left[2\left(e^{bt}+1\right)be^{bt}\right]}{(e^{bt}+1)^4} = \frac{2hb^2\,e^{bt}\left(e^{bt}+1\right)}{(e^{bt}+1)^4}\left(e^{bt}+1-2e^{bt}\right) \leq 0\ se:$$

$-e^{bt}+1 \leq 0$, $e^{bt} \geq 1$, $bt \geq 0$, $t \geq 0$.

Quindi l'accelerazione è decrescente per $t \geq 0$, cioè al trascorrere del tempo.

Verifichiamo a che cosa tende l'accelerazione al trascorrere del tempo, cioè per $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\,h\,b\,e^{bt}}{(e^{bt}+1)^2} = 2hb \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{bt}}{e^{2bt}} = 2hb \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{bt}} = 0^+$$

Quindi al trascorrere del tempo l'accelerazione tende a zero.

Descrizione fisica:

un corpo si muove in caduta libera e, per effetto della resistenza dell'aria, è soggetto ad una forza frenante di modulo $F = k \cdot [v(t)]^2$, con $v(t) = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}$ (h e b costanti positive). La velocità cresce fino al valore limite h (velocità di regime). Dopo molto tempo (valori molto grandi di t) lo spazio percorso in funzione del tempo è dato da: $s(t) \simeq ht$, quindi il moto tende a diventare uniforme. L'accelerazione del corpo tende ad annullarsi al trascorrere del tempo, a conferma che la velocità tende a stabilizzarsi intorno al valore di regime $v = h$.

Posto $h = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ e $b = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}$, dove m indica la massa del corpo e g l'accelerazione di gravità, verifichiamo che viene rispettato il 2° principio della dinamica, cioè che $\vec{F} = m\vec{a}$.

Durante il moto il corpo è soggetto alla forza peso (verso il basso, consideriamola positiva) ed alla forza di attrito (che sarà da considerare negativa), quindi, il modulo della forza risultante è data da:

$$F = Forza\ peso - Forza\ di\ attrito = mg - k \cdot [v(t)]^2 = mg - k\left(h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\right)^2 =$$

$$= mg - kh^2\left(\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\right)^2 = mg - k\left(\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)^2\left(\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\right)^2 = mg - mg\left(\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\right)^2 =$$

$$= mg\left[1-\left(\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\right)^2\right] = mg\left[\frac{\left(e^{bt}+1\right)^2-\left(e^{bt}-1\right)^2}{(e^{bt}+1)^2}\right] = mg\left[\frac{4e^{bt}}{(e^{bt}+1)^2}\right] = \frac{4mge^{bt}}{(e^{bt}+1)^2} =$$

$$= m\left(\frac{4ge^{bt}}{(e^{bt}+1)^2}\right)$$

Essendo: $2hb = 4\sqrt{\frac{mg}{k}}\sqrt{\frac{kg}{m}} = 4g$, risulta: $a(t) = \frac{2hb\, e^{bt}}{\left(e^{bt}+1\right)^2} = \frac{4g\, e^{bt}}{\left(e^{bt}+1\right)^2}$ si ha quindi:

$$F = m\left(\frac{4ge^{bt}}{(e^{bt}+1)^2}\right) = ma, \qquad c.v.d.$$

Determiniamo le dimensioni fisiche di h e b.

Ricordiamo che:

$[k] = \left[\frac{F}{v^2}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2 \cdot T^{-2}}\right] = [ML^{-1}]$, *quindi l'unità di misura di* k è $\frac{kg}{m}$. Risulta:

$h = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, $[h] = \left[\sqrt{\frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}}}\right] = [LT^{-1}]$: quindi h ha le dimensioni di una velocità.

$b = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}$, $[b] = \left[\sqrt{\frac{(ML^{-1})(LT^{-2})}{M}}\right] = [T^{-1}]$: quindi b ha le dimensioni del reciproco di un tempo.

c)

Tracciare, indipendentemente dalla situazione fisica, il grafico Γ della funzione $v(t)$ per $t \in \mathbb{R}$, specificandone la simmetria. Dedurre da esso, in modo qualitativo, il grafico della sua primitiva passante per il punto $\left(0; \frac{2h}{b}\ln 2\right)$. In particolare, stabilire se la primitiva ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, scriverne le equazioni, sempre considerando che, per $t \to +\infty$, si può ricorrere all'approssimazione $1 + e^{bt} \simeq e^{bt}$.

Studiamo il grafico della funzione $y = v(t) = h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}$ indipendentemente dall'aspetto fisico (cioè per ogni t reale).

La funzione è definita per ogni t.
Intersezioni con gli assi: $se\ t = 0, y = 0;\ se\ y = 0, e^{bt} - 1 = 0, quindi\ t = 0$
Segno della funzione: si ha $y > 0\ se\ e^{bt} - 1 > 0,\ e^{bt} > 1:\ bt > 0,\ t > 0;\quad y < 0\ se\ t < 0$.

Limiti:

$$\lim_{t\to-\infty} v(t) = \lim_{t\to-\infty} h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1} = -h : y = -h\ asintoto\ orizzontale\ per\ t \to -\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1} = \lim_{t\to+\infty} h\,\frac{e^{bt}}{e^{bt}} = h : y = h\ asintoto\ orizzontale\ per\ t \to +\infty$$

Non ci sono asintoti verticali né obliqui.

Risulta:

$$v(-t) = h\,\frac{e^{-bt}-1}{e^{-bt}+1} = \left(moltiplichiamo\ numeratore\ e\ denominatore\ per\ \ e^{bt}\ \right)$$

$= h\frac{1-e^{bt}}{1+e^{bt}} = -v(t)$: la funzione è dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Studio della derivata prima. Come già verificato nel punto a) risulta:

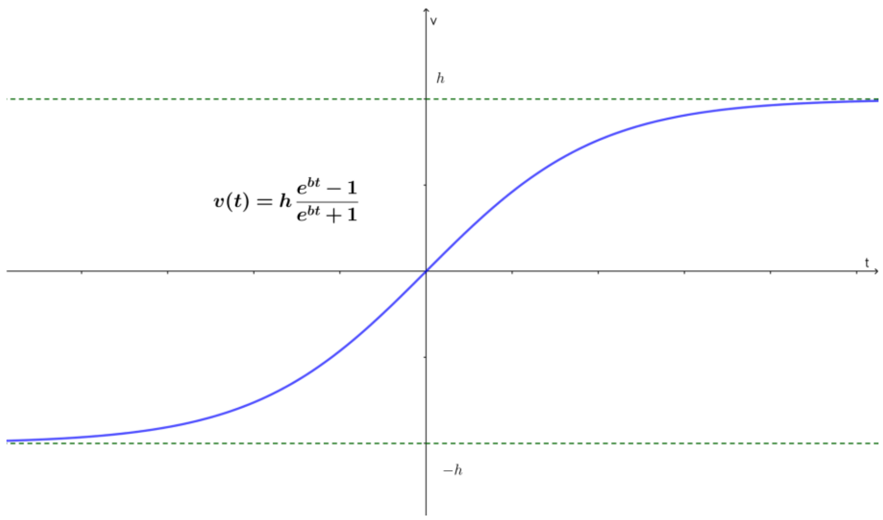
$$v'(t) = \frac{2\,h\,b\,e^{bt}}{(e^{bt}+1)^2} > 0\ \ per\ ogni\ t:\ \ grafico\ sempre\ crescente, \text{nè}\ massimi\ \text{nè}\ minimi.$$

Studio della derivata seconda. Come già visto nel punto b) risulta:

$$v''(t) = a'(t) = \frac{2hb^2\,e^{bt}\left(e^{bt}+1\right)}{(e^{bt}+1)^4}\left(e^{bt}+1-2e^{bt}\right) \geq 0\ \ se\ t \leq 0$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per t<0 e verso il basso per t>0; esso presenta un flesso F per t=0 ed è $F = (0;0)$.

Grafico:



Ricordiamo che le primitive di $v(t)$ danno $s(t)$ e, come già visto:

$$\int v(t)dt = s(t) = \frac{2h}{b}\ln\left(e^{bt}+1\right) - ht + C$$

Cerchiamo la primitiva passante per $\left(0;\frac{2h}{b}\ln 2\right)$:

$\frac{2h}{b}\ln 2 = \frac{2h}{b}\ln 2 + C, quindi:\ C = 0$. La primitiva richiesta è:

$$y = s(t) = \frac{2h}{b}\ln\left(e^{bt}+1\right) - ht$$

Dal grafico di $y = v(t)$ deduciamo (ragionando sul significato geometrico dell'integrale definito come area e notando che il grafico è crescente) che, per $t \to +\infty$, $y \to +\infty$. La primitiva è una funzione pari essendo $v(t)$ dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Risulta poi $s'(t) = v(t) > 0$ per $t > 0$, quindi s cresce per $t > 0$ e, per la simmetria suddetta, decresce per $t < 0$. Per $t = 0$ abbiamo il minimo (relativo e assoluto) $\left(0; \frac{2h}{b} \ln 2\right)$.
La derivata seconda $s''(t)$ è $a(t) = v'(t)$, *che* è *sempre positiva* (il grafico di v è sempre crescente), quindi il grafico di s volge sempre la concavità verso l'alto.

Stabiliamo se $s(t)$ ha asintoti obliqui (è sufficiente analizzare $t \to +\infty$). Osserviamo che:

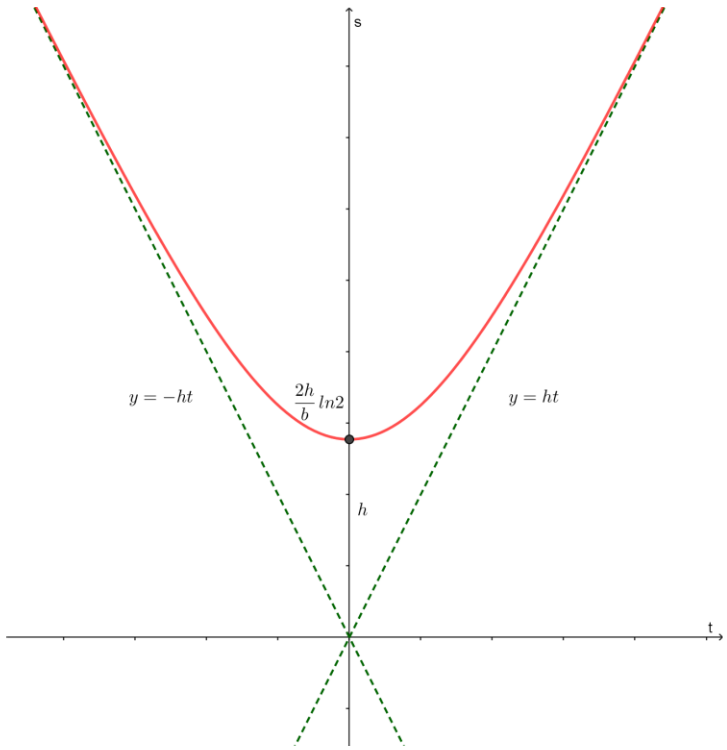
$$s(t) = \frac{2h}{b} \ln\left(e^{bt} + 1\right) - ht \sim \frac{2h}{b}(bt) - ht = ht$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{s(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ht}{t} = h = m; \quad \lim_{t\to+\infty} [s(t) - mt] = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2h}{b} \ln\left(e^{bt} + 1\right) - ht - ht\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2h}{b}(bt) - 2ht\right] = 0 = q: \quad y = ht \text{ asintoto obliquo per } t \to +\infty.$$

Data la simmetria della funzione, per $t \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = -ht$.

Il grafico richiesto è del tipo:



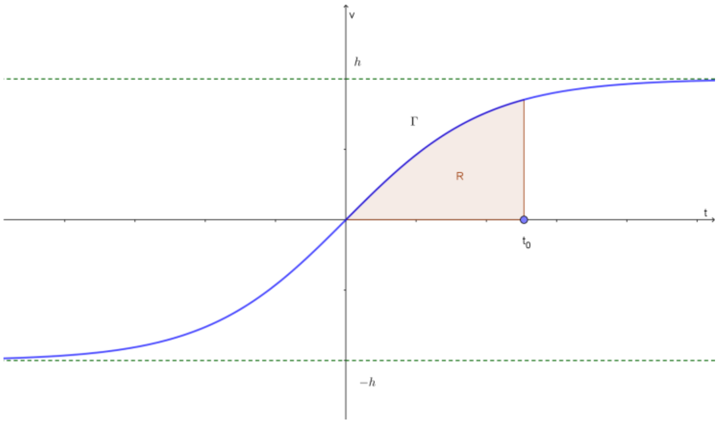
d)

Preso $t_0 > 0$, calcolare l'area A della regione R nel 1° quadrante che è delimitata dal grafico Γ, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $t = t_0$. Stabilire se, per $t_0 \to +\infty$, l'area A tende o meno ad un valore finito. Infine, preso $\tau > 0$, calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{-\tau}^{\tau} a(t)\,dt$$

e stabilire il suo comportamento per $\tau \rightarrow +\infty$.

Rappresentiamo la regione R:



L'area A della regione R è data da:

$$A = \int_0^{t_0} v(t)\,dt = \int_0^{t_0} h\,\frac{e^{bt}-1}{e^{bt}+1}\,dt = \left[\frac{2h}{b}\cdot ln(1+e^{bt}) - ht\right]_0^{t_0} = \frac{2h}{b}\cdot ln(1+e^{bt_0}) - ht_0 - \frac{2h}{b}\cdot \ln 2$$

Stabiliamo se per $t_0 \rightarrow +\infty$, l'area A tende o meno ad un valore finito:

$$\lim_{t_0\rightarrow+\infty}\left[\frac{2h}{b}\cdot ln(1+e^{bt_0}) - ht_0 - \frac{2h}{b}\cdot \ln 2\right] = \lim_{t_0\rightarrow+\infty}\left[\frac{2h}{b}\cdot bt_0 - ht_0 - \frac{2h}{b}\cdot \ln 2\right] =$$
$$= \lim_{t_0\rightarrow+\infty}\left[ht_0 - \frac{2h}{b}\cdot \ln 2\right] = +\infty$$

Quindi l'area A tende all'infinito.

Preso $\tau > 0$, calcoliamo il valore dell'integrale

$$\int_{-\tau}^{\tau} a(t)\,dt$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} a(t)\,dt = [v(t)]_{-\tau}^{\tau} = [v(\tau) - v(-\tau)] = v(\tau) + v(\tau), \qquad poiché \;\; v(t) \;\; è \; dispari.$$

Quindi: $\int_{-\tau}^{\tau} a(t)\,dt = 2\,v(\tau)$

Per $\tau \rightarrow +\infty$ il suddetto integrale tende a $2h$ (poiché $v(t) \rightarrow h \; per \; t \rightarrow +\infty$).

Con la collaborazione di Angela Santamaria