LICEO SCIENTIFICO 2019 – CALENDARIO BOREALE - QUESTIONARIO

Q1

Assegnata la funzione $f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{x}$, mostrare che esiste un solo valore $b > -3$ tale che nell'intervallo $[-3, b]$ siano rispettate tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Determinare tale valore b.

Affinché la funzione sia continua nell'intervallo $[-3, b]$, questo non deve contenere lo 0, quindi deve essere $b < 0$; per ogni $b < 0$ la funzione è derivabile nell'intervallo aperto $(-3; b)$. Resta da imporre che sia $f(-3) = f(b)$, quindi:

$f(-3) = 9 - 9 + 1 = 1$, $f(b) = b^2 + 3b - \frac{3}{b} = 1$, $b^3 + 3b^2 - 3 = b$, $b^3 + 3b^2 - b - 3 = 0$,

$b^2(b + 3) - (b + 3) = 0$, $\quad (b + 3)(b^2 - 1) = 0$, $\quad b = \pm 1$.

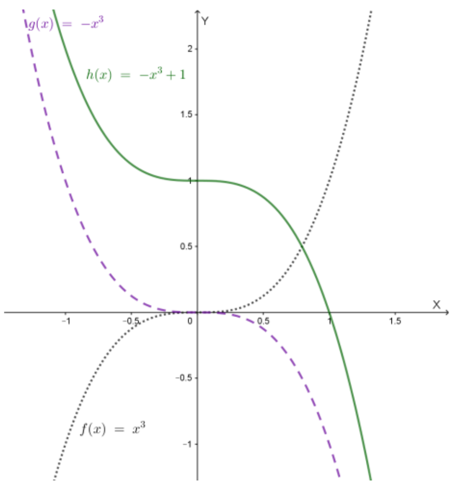
Il valore richiesto è $b = -1$.

Q2

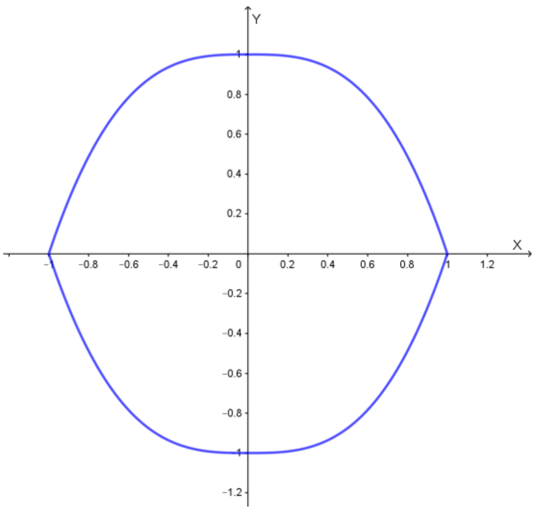
Dopo aver verificato che la curva di equazione $|y| + |x|^3 = 1$ è simmetrica sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y, determinare l'area della regione piana delimitata da tale curva.

Scambiando y *in* $-y$ l'equazione non cambia:
$|-y| + |x|^3 = 1$ *coincide con* $|y| + |x|^3 = 1$, quindi la curva è simmetrica rispetto all'asse x.
Scambiando x *in* $-x$ l'equazione non cambia:
$|y| + |-x|^3 = 1$ *coincide con* $|y| + |x|^3 = 1$, quindi la curva è simmetrica rispetto all'asse y.
Essendo simmetrica rispetto agli assi, la curva è simmetrica rispetto all'origine.

Il grafico della curva si ottiene facilmente dal grafico di $y + x^3 = 1$, *cioè* $y = -x^3 + 1$ con $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$, completandolo con il suo simmetrico rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine degli assi. Il grafico di $y = -x^3 + 1$ si ottiene dal grafico di $y = x^3$ ribaltandolo rispetto all'asse x e traslandolo di 1 verso l'alto:



Quindi la curva di equazione $|y| + |x|^3 = 1$ ha il seguente grafico:

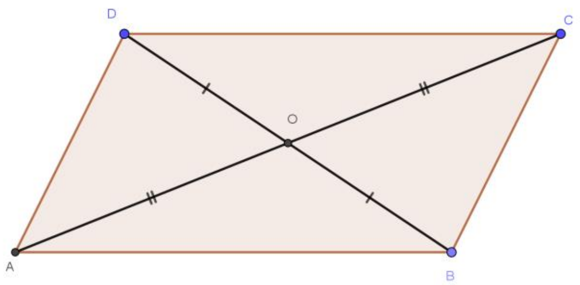


L'area richiesta è data da:

$$Area = 4\int_0^1 (-x^3+1)\,dx = 4\left[-\frac{1}{4}x^4+x\right]_0^1 = 4\left[-\frac{1}{4}+1-0\right] = 3\ u^2\ .$$

Q3

Dimostrare che, se in un parallelogramma si tracciano le due diagonali, esso viene suddiviso in quattro triangoli di area uguale. Discutere la validità o meno dell'affermazione inversa: se un quadrilatero convesso viene suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli di area uguale, allora esso è un parallelogramma.



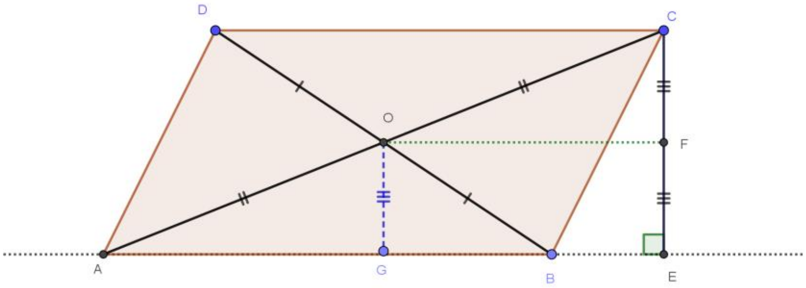
Dimostrazione trigonometrica: detti α e β gli angoli DOC e BOC risulta $\beta = \pi - \alpha$. Inoltre:

$$Area(DOC) = \frac{1}{2}DO \cdot OC\ sen\alpha\ , \qquad Area(BOC) = \frac{1}{2}BO \cdot OC\ sen\,\beta = \frac{1}{2}DO \cdot OC\ sen(\pi-\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}DO \cdot OC\ sen\alpha = Area(DOC).$$

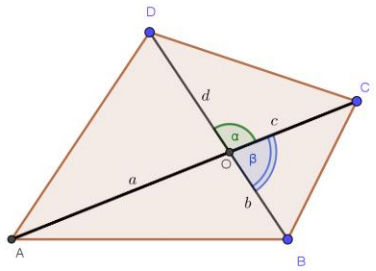
Poiché i triangoli DOC e AOB sono congruenti e così pure i triangoli BOC e AOD, segue che i quattro triangoli in cui il parallelogramma viene diviso dalle diagonali sono equivalenti.

Dimostrazione geometrica: è sufficiente dimostrare che i triangoli AOB e BOC hanno la stessa area. Per far ciò basta dimostrare che l'area di AOB è la metà dell'area di ABC. Questi due triangoli hanno la stessa base AB, inoltre l'altezza OG di AOB relativa ad AB è la metà dell'altezza CE di ABC relativa ad AB;

infatti, se da O (punto medio di AC) mandiamo la parallela ad AB, questa incontra l'altezza CH nel suo punto medio (conseguenza del teorema di Talete).



Discutiamo la validità dell'affermazione inversa.



In base all'ipotesi, calcolando le quattro aree in termini trigonometrici, essendo $sen\ \alpha = sen\ \beta$, deve essere:

$ab = cd = bc = ad$, $\quad$ $quindi$:
$da\ ab = bc\ \ segue\ \ a = c\ \ e\ da\ \ cd = bc\ \ segue\ b = d$

Le diagonali del quadrilatero quindi si bisecano scambievolmente, pertanto il quadrilatero è un parallelogramma: l'affermazione inversa è vera.

Q4

Sono assegnati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 4, 2)$, $C(5, 1, 4)$, $D(1, 0, 4)$. Dopo aver dimostrato che $ABCD$ è un rombo, determinare l'area di tale rombo ed il raggio della circonferenza in esso inscritta.

Dobbiamo prima dimostrare che A, B, C e D sono complanari. Per far ciò cerchiamo l'equazione del piano per A, B e C e dimostriamo che D appartiene a tale piano.

$ax + by + cz + d = 0$

Imponiamo il passaggio per A, B e C:

$\begin{cases} -a + 3b + 2c + d = 0 \\ 3a + 4b + 2c + d = 0 \\ 5a + b + 4c + d = 0 \end{cases}$; sottraiamo alla seconda equazione la prima: $\begin{cases} -a + 3b + 2c + d = 0 \\ 4a + b = 0 \\ 5a + b + 4c + d = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -a + 3b + 2c + d = 0 \\ b = -4a \\ 5a + b + 4c + d = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -13a + 2c + d = 0 \\ b = -4a \\ a + 4c + d = 0 \end{cases}$; sottraiamo alla terza equazione la prima:

$$\begin{cases} 14a + 2c = 0 \\ b = -4a \\ a + 4c + d = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} c = -7a \\ b = -4a \\ -27a + d = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} c = -7a \\ b = -4a \\ d = 27a \end{cases}: \ ax - 4ay - 7az + 27a = 0$$

Il piano per A, B e C ha quindi equazione: $x - 4y - 7z + 27 = 0$

Verifichiamo che D appartiene a questo piano: $1 - 28 + 27 = 0$: *verificato*.

Per verificare che ABCD è un rombo verifichiamo che tutti i lati sono uguali.

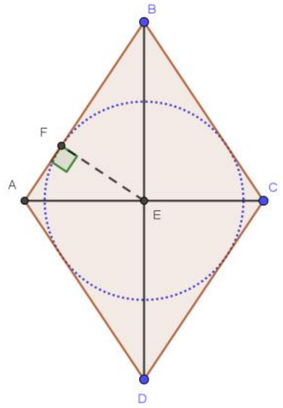
$A(-1, 3, 2)$, $B(3, 4, 2)$, $C(5, 1, 4)$, $D(1, 0, 4)$

$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{17}$; $BC = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{16+1+0} = \sqrt{17}$; $DA = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

ABCD è quindi un rombo.

Osserviamo la seguente figura:



$A(-1, 3, 2)$, $B(3, 4, 2)$, $C(5, 1, 4)$, $D(1, 0, 4)$

L'area del rombo è data da:
$Area(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{2}$; $AC = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44}$; $BD = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24}$; quindi:

$$Area(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{44} \cdot \sqrt{24}}{2} = 2\sqrt{66}\ u^2$$

Essendo il rombo un parallelogramma, la cui altezza nel nostro caso è $2FE$, la sua area può essere trovata come base per altezza, quindi:

$$Area(ABCD) = AB(2FE) = 2\sqrt{66}, \qquad FE = \frac{\sqrt{66}}{AB} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{66}{17}}$$

Secondo metodo (tutto basato sulla geometria analitica) che riportiamo solo per mostrare un utile esercizio per trovare la distanza di un punto da una retta nello spazio.

Il raggio EF della circonferenza inscritta nel rombo è dato dalla distanza del punto medio E della diagonale AC dalla retta AB. Per trovare F intersechiamo la retta AB con il piano per E perpendicolare ad AB. Cerchiamo le equazioni parametriche della retta AB.

Una terna (l, m, n) di parametri direttori di AB è data da: $l = 3 + 1 = 4, m = 4 - 3 = 1, n = 2 - 2 = 0$.
La retta AB ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

Cerchiamo il punto medio E della diagonale AC: $E = \left(\frac{-1+5}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (2; 2; 3)$
Il piano per E perpendicolare alla retta AB ha equazione:

$$4(x - 2) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0; \;\; 4x + y - 10 = 0.$$

Cerchiamo F intersecando questo piano con la retta AB:

$$4(-1 + 4t) + (3 + t) - 10 = 0; \;\; 17t - 11 = 0; \;\; t = \frac{11}{17}; \;\; sostituendo\ nelle\ equazioni\ di\ AB:$$

$$\begin{cases} x = -1 + 4t = -1 + \frac{44}{17} = \frac{27}{17} \\ y = 3 + t = 3 + \frac{11}{17} = \frac{62}{17} \\ z = 2 \end{cases} : \;\; F = \left(\frac{27}{17}; \frac{62}{17}; 2\right); \;\; E = (2; 2; 3)$$

Il raggio della circonferenza inscritta nel rombo è quindi:

$$EF = \sqrt{\left(\frac{27}{17} - 2\right)^2 + \left(\frac{62}{17} - 2\right)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{\frac{66}{17}}\,.$$

Q5

Alberto e Barbara fanno un gioco: ognuno lancia contemporaneamente 5 dadi, con facce numerate da 1 a 6. Ciascun dado fa guadagnare un punto a chi lo ha lanciato se esce il numero 5 o il 6; le facce da 1 a 4 non fanno guadagnare punti. Vince chi, con i 5 dadi lanciati, realizza più punti. Qual è la probabilità che pareggino?

Alberto e Barbara possono fare da 0 a 5 punti e pareggiano se realizzano gli stessi punti.
Indichiamo con $p(0), p(1), p(2), p(3), p(4) e\ p(5)$ le probabilità che Alberto (e Barbara) faccia rispettivamente 0, 1, 2, 3, 4, 5 punti. La probabilità che pareggino sarà:

$$p(0) \cdot p(0) + p(1) \cdot p(1) + p(2) \cdot p(2) + p(3) \cdot p(3) + p(4) \cdot p(4) + p(5) \cdot p(5) \qquad (*)$$

Calcoliamo le probabilità necessarie.

$p(0)$ è la probabilità che nel lancio contemporaneo dei 5 dadi su ciascuno esca il numero da 1 a 4. La probabilità che su un dado esca il 5 o il 6 è $\frac{2}{6}$ (successo). La probabilità che questa eventualità si ripeta su 0 dadi si ottiene come distribuzione binomiale di n=5 casi ripetuti, con k=0 successi e probabilità di successo $p = \frac{2}{6}$. Quindi:

$$p(0) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{6}\right)^0 \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$p(1)$ è la probabilità che nel lancio contemporaneo dei 5 dadi (con la convenzione precedente) si abbia 1 successo, quindi:

$$p(1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^4 = 5\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^4$$

Con ragionamento analogo si avrà:

$$p(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^3 = 10\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^3, \qquad p(3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^2 = 10\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^2$$

$$p(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^1 = 5\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^1, \qquad p(5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^0 = \left(\frac{2}{6}\right)^5$$

La probabilità richiesta (*) è quindi:

$$p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 + p(4)^2 + p(5)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^{10} + 25\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^8 + 100\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^6 +$$

$$+100\left(\frac{2}{6}\right)^6\left(\frac{4}{6}\right)^4 + 25\left(\frac{2}{6}\right)^8\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 25\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 + 100\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6 +$$

$$+100\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 25\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{575}{2187} \cong 0.263 = 26.3\ \%$$

Quindi la probabilità che il gioco finisca in pareggio è di circa il 26 %.

Q6

Un elettrone, un protone e una particella α sono accelerati, da fermi, da una differenza di potenziale ΔV e in seguito penetrano, nello stesso punto, in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e perpendicolare alle velocità. Esprimere i raggi di curvatura delle traiettorie del protone e della particella α in funzione del raggio di curvatura dell'elettrone. A parte l'entità dei raggi di curvatura, in cosa differiranno le traiettorie?

Calcoliamo prima le velocità con cui l'elettrone, il protone e la particella α penetrano nel campo magnetico. Indicando con d lo spazio percorso dalle tre cariche prima di entrare nel campo magnetico, risulta:

$$F = ma\,, \quad qE = ma, \qquad q\frac{\Delta V}{d} = ma\,, \qquad a = \frac{q\Delta V}{md}, \quad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = v$$

Ricordiamo che, per la legge di Lorentz, se una carica q di massa m entra in un campo magnetico uniforme B con velocità v perpendicolare alla direzione del campo magnetico, essa è soggetta ad una deflessione circolare con raggio di curvatura R dato da:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Il raggio di curvatura dell’elettrone è dato da:

$$R_e = \frac{m_e v}{eB} = \frac{m_e\sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}}}{eB} = \sqrt{\frac{2em_e\Delta V}{e^2B^2}} = \sqrt{\frac{2m_e\Delta V}{eB^2}} = R_e$$

Il raggio di curvatura del protone (ricordiamo che la massa del protone è circa 1836 volte la massa dell’elettrone e la sua carica è uguale a quella dell’elettrone ma di segno opposto) è dato da:

$$R_p = \sqrt{\frac{2m_p\Delta V}{q_pB^2}} = \sqrt{\frac{2m_e\cdot 1836\,\Delta V}{eB^2}} = \sqrt{1836}\sqrt{\frac{2m_e\,\Delta V}{eB^2}} \cong 43\cdot R_e = R_p$$

Il raggio di curvatura della particella α (nucleo di elio costituito da 2 protoni e due neutroni, quindi $m_\alpha = 2m_p + 2m_n \cong 4m_p;\ \ q_\alpha = 2q_p = 2e$) è dato da:

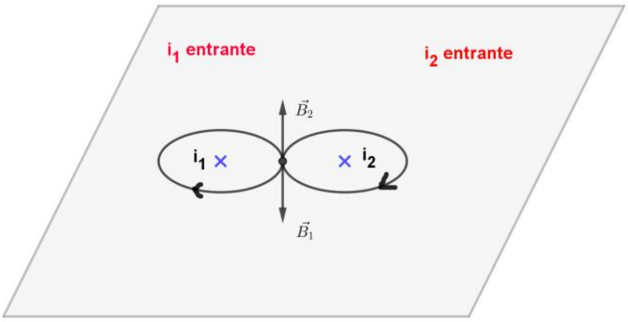
$$R_\alpha = \sqrt{\frac{2m_\alpha\Delta V}{q_\alpha B^2}} = \sqrt{\frac{8m_p\,\Delta V}{2q_p\,B^2}} = \sqrt{\frac{4m_p\,\Delta V}{e\,B^2}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2m_p\,\Delta V}{e\,B^2}}\right) = \sqrt{2}(R_p) \cong \sqrt{2}(43\cdot R_e) \cong 61\,R_e = R_\alpha$$

Come già detto le traiettorie delle tre cariche sono circolari; la differenza è il verso di percorrenza: quello del protone e della particella α, cariche positive, è l’opposto di quello dell’elettrone, carica negativa.

Q7

Due conduttori rettilinei, paralleli e complanari sono percorsi da correnti concordi di intensità $I_1 = 4\,A$ e $I_2 = 6\,A$. I due conduttori sono fissati ad una distanza di 2 cm uno dall’altro. Determinare modulo, direzione e verso del campo magnetico nei punti del piano equidistanti dai due conduttori. Un terzo conduttore rettilineo, attraversato da una corrente I_3, libero di muoversi lateralmente, viene posto tra i primi due come in figura. Calcolare la posizione nella quale quest’ultimo conduttore resta in equilibrio. Determinare il verso della corrente I_3 in modo che la precedente posizione di equilibrio sia stabile.

I campi magnetici generati dalle correnti 1 e 2 sono perpendicolari al piano del foglio ed hanno versi opposti (vedi figura).



Il campo totale (nei punti del piano equidistanti dai due fili) è perpendicolare al piano del foglio ed ha il verso di $\overrightarrow{B_2}$ (poiché l'intensità di $\overrightarrow{B_2}$ è maggiore dell'intensità di $\overrightarrow{B_1}$) ed ha intensità, per la legge di Biot-Savart, pari a:

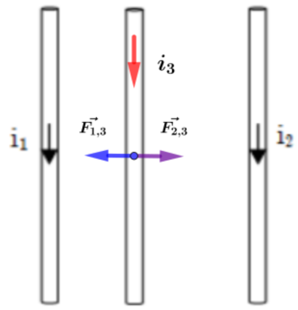
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\ , \quad con\ I = (6-4)A = 2\ A\ \ ed\ R = 1\ cm.$$

Quindi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\left(\frac{H}{m}\right)\cdot 2\ A}{2\pi \cdot 10^{-2}\ m} = 4\cdot 10^{-5}\ \frac{H}{m^2}\cdot A = 4\cdot 10^{-5}\ \frac{\frac{m^2\ kg}{s^2\ A^2}}{m^2}\ A = 4\cdot 10^{-5}\ \frac{kg}{s^2\ A} =$$

$$= 4\cdot 10^{-5}\ tesla = 4\cdot 10^{-5}\ T\ .$$

Il terzo conduttore sarà in equilibrio quando le forze a cui è soggetto per effetto dei campi magnetici generati dai due fili sono uguali ed opposte. In figura il caso in cui nel terzo conduttore 3 la corrente circola nello stesso verso delle correnti che circolano nei due conduttori 1 e 2. Il conduttore 3 è sottoposto ad una forza attrattiva sia dal conduttore 1 sia dal conduttore 2.



Detta x la distanza in cm dal conduttore 1, ed l la lunghezza in cm dei tre fili, le due forze hanno intensità:

$$F_{1,3} = k\frac{I_1\ I_3}{x}\ l,\ \ F_{2,3} = k\frac{I_2\ I_3}{(2-x)}\ l, \qquad con\ \ k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Il filo 3 sarà in equilibrio quando:

$$k\frac{I_1\ I_3}{x}\ l = k\frac{I_2\ I_3}{(2-x)}\ l\ ,\ \ \frac{I_1}{x} = \frac{I_2}{2-x}\ \ ,\quad 4(2-x) = 6x\ \ ,\ \ 10x = 8\ ,\ \ x = \frac{8}{10}\ cm = 0.8\ \ cm$$

Il conduttore è in equilibrio quando si trova a 0.8 cm dal filo 1.

N.B. Se nel conduttore 3 la corrente circola in verso opposto a quello dei conduttori 1 e 2 la posizione di equilibrio è la stessa (le due forze $F_{1,3}\ \ e\ \ F_{2,3}$ hanno verso opposto).

Stabiliamo ora quale verso deve avere la corrente che circola nel conduttore 3 affinché la posizione di equilibrio sia stabile (se sottoponiamo il filo ad un piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio esso tende a ritornare nella posizione di equilibrio).

Se il verso è concorde con quello delle correnti che circolano nei fili 1 e 2 (come nella figura indicata sopra), spostando per esempio il filo 3 verso destra aumenta la forza attrattiva del filo 2 e diminuisce quella attrattiva del filo 1, quindi il filo 3 tende a spostarsi verso il filo 2 e perciò l'equilibrio non è stabile. Viceversa, se la corrente che circola nel filo 3 è discorde con quella che circola nei fili 1 e 2, la forza esercitata dal filo 1 è repulsiva e anche quella esercitata dal filo 2; spostando per esempio il filo 3 verso destra aumenta la forza repulsiva $F_{2,3}$ e diminuisce la forza repulsiva esercitata dal filo 1: il filo 3 tende quindi ad avvicinarsi al filo 1: anche in tal caso l'equilibrio non è stabile.

Quindi, a prescindere dal verso della corrente che circola nel filo 3, L'EQUILIBRIO NON è MAI STABILE

Q8

Considerare due sistemi di riferimento inerziali $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ con assi paralleli. $\mathcal{R}'$ si muove con velocità $v > 0$, rispetto a $\mathcal{R}$, lungo l'asse x. Inoltre, quando $t = t' = 0$, le origini O, O' dei due sistemi di riferimento coincidono. Si dimostra che la velocità $\overrightarrow{w'} = (w'_x, w'_y, w'_z)$ di una particella rispetto a $\mathcal{R}'$ è legata alla velocità $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ della medesima particella rispetto a $\mathcal{R}$ attraverso le seguenti relazioni (trasformazioni delle velocità):

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \qquad w'_y = \frac{w_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \qquad w'_z = \frac{w_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}.$$

Mostrare, utilizzando le trasformazioni delle velocità, che se $\vec{w} = (0, c, 0)$ o $\vec{w} = (c, 0, 0)$, dove c è la velocità di un raggio luminoso nel vuoto, allora il modulo della velocità $\overrightarrow{w'}$ vale c. Questo risultato poteva essere dedotto a priori senza effettuare alcun calcolo?

Se $\vec{w} = (0, c, 0)$ si ha:

$$w'_x = \frac{0 - v}{1 - 0} = -v\,, \quad w'_y = \frac{c\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}{1 - 0} = \sqrt{c^2 - v^2}\,, \qquad w'_z = 0$$

Quindi:

$$|\overrightarrow{w'}| = \sqrt{(w'_x)^2 + \left(w'_y\right)^2 + (w'_z)^2} = \sqrt{v^2 + (c^2 - v^2) + 0} = c$$

Se $\vec{w} = (c, 0, 0)$ si ha :

$$w'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c\,, \quad w'_y = 0\,, \qquad w'_z = 0$$

Quindi:

$$|\overrightarrow{w'}| = \sqrt{(w'_x)^2 + \left(w'_y\right)^2 + (w'_z)^2} = \sqrt{c^2 + 0 + 0} = c$$

Questo risultato poteva essere previsto senza calcoli in base al ***secondo postulato della relatività ristretta*** *(invarianza della velocità della luce)*, secondo cui la velocità della luce nel vuoto è costante (c) in ogni sistema di riferimento inerziale, indipendentemente dalla velocità v con cui un sistema si muove rispetto all'altro.

Con la collaborazione di Angela Santamaria