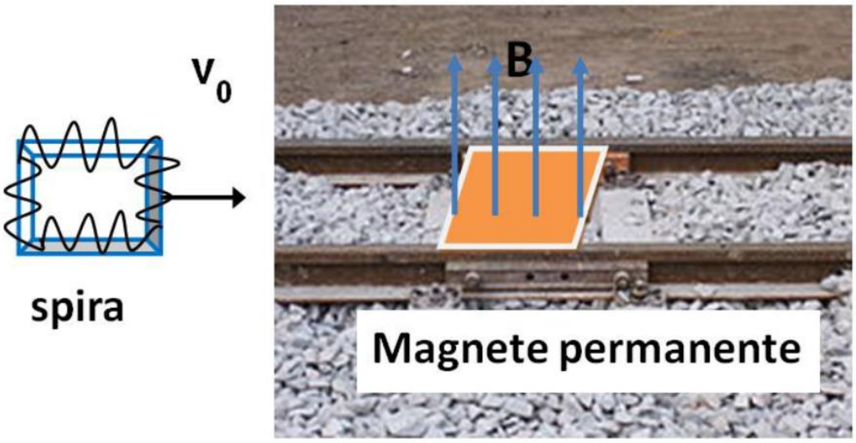
SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA E FISICA

PROBLEMA 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L = 5{,}0cm$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R = 0{,}020\Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1)

Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

Il campo magnetico permanente produce nella spira una corrente indotta (per effetto della variazione del flusso attraverso la spira quadrata), il cui verso è tale da opporsi alla causa che l'ha prodotta (variazione del flusso attraverso la spira). Siccome il flusso attraverso la spira quadrata tende ad aumentare man mano che essa penetra nel campo magnetico permanente, la corrente indotta ostacola (per la legge di Lenz) tale aumento, producendo quindi un rallentamento del treno.

Osserviamo che la corrente indotta produce un campo magnetico (campo magnetico indotto) che, sempre per la legge di Lenz, ha verso tale da ostacolare la causa che l'ha prodotto.

2)

Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B = 0{,}85T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove $m = 50g$ è la massa del vagone.

Indicando con dx il tratto della spira quadrata immerso nel campo permanente all'istante dt, dopo questo istante la superficie S della spira interna al campo magnetico permanente è Ldx. Indicata con i la corrente indotta, e ricordando che nel tratto di circuito di lunghezza L il campo B produce una forza pari a BiL, risulta: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = BiL$. Detta f la forza elettromotrice indotta, si ha:

$$f = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad ; \quad d\Phi(B) = B(dS) = B(Ldx)\,; \quad f = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{BLdx}{dt} = -BLv$$

Ma è:

$i = \frac{f}{R}$, $quindi;$ $m\frac{dv}{dt} = BiL = BL\frac{f}{R} = \frac{BL}{R}(-BLv) = -\frac{B^2L^2}{R}\,v$.

Risulta quindi dimostrato che: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}\,v$ (*)

3)

Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

Per trovare l'equazione del moto dobbiamo risolvere l'equazione differenziale (*) che riscriviamo nella forma seguente:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{m\,R}\,dt$$

Integrando membro a membro abbiamo:

$$ln|v| = -\frac{B^2L^2}{m\,R}\,t + K\,,\ \ |v| = e^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t+K} = e^Ke^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t}\,,\ \ v = H\,e^{-\frac{B^2L^2}{m\,R}t}\ \ (H = \pm e^K)$$

Siccome per $t = 0$ $risulta\ v = v_0\,,\ abbiamo\colon\ v_0 = H\,,\ quindi,\ posto\ \tau = \frac{m\,R}{B^2L^2}$:

$$v = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (**)\ , \qquad con \quad \tau = \frac{m\,R}{B^2L^2}$$

Calcoliamo il valore numerico di τ (che ha le dimensioni di un tempo, come si può dedurre dalla (**), dovendo essere $\frac{t}{\tau}$ un numero puro:

$$\tau = \frac{m\,R}{B^2L^2} = \frac{(50\ g)(0.020\ \Omega)}{(0.85\ T)^2(5.0\ cm)^2} = \frac{(5\cdot 10^{-2}kg)(20\cdot 10^{-3}\ \Omega)}{0.7225\ T^2\ (25\cdot 10^{-4}m^2)} = \frac{10^{-3}}{1.81\cdot 10^{-3}}\ s \cong 0.55\ s$$

Quindi: $\tau = 0.55\ s$.

4)

Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0{,}20\ {}^{m}/_{s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

Osserviamo che $v = \frac{dx}{dt}$, quindi: $dx = vdt = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt$ e integrando membro a membro:

$$x = \int v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\ dt = -v_0\tau \int -\frac{1}{\tau}\ e^{-\frac{t}{\tau}}\ dt = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + A$$

Essendo x=0 per t=0 risulta: $0 = -v_0\tau + A$, $A = v_0\tau$, quindi l'equazione del moto è:

$$x = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + A = -v_0\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0\tau = v_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = x(t)$$

La spira attraversa completamente il magnete quando x=2L, quindi:

$$2L = v_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ \frac{2L}{v_0\tau} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\ , \qquad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{2L}{v_0\tau};\ \ e^{-\frac{t}{0.55}} = 1 - \frac{2\cdot 0.05}{0.20\cdot 0.55} = 0.09\ ,$$

$$-\frac{t}{\tau} = ln(0.09)\ , \qquad t = -\tau\, ln(0.09) = (-0.55\, ln(0.09))\ s = 1.32\ \ s\ .$$

Il tempo che impiega la spira per attraversare completamente il magnete è quindi t=1.32 s .

Calcoliamo la velocità che ha la spira dopo aver attraversato completamente il magnete, cioè la velocità all'stante t=1.32 s, sostituendo tale tempo nella $v = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$:

$$v = (0.20\ m/s)\ e^{-\frac{1.32}{0.55}} = 0.02\ m/s\ .$$

5)

Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

Dalla legge oraria del moto $v_0\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=x(t)$ deduciamo che se $t\to+\infty$, $x\to v_0\tau$
Uguagliando tale valore a 2L troviamo il valore limite di v_0:

$$v_0\,\tau=2L, \qquad v_0=\frac{2L}{\tau}=\frac{2\cdot 0.05\,m}{0.55\,s}=0.18\ m/s$$

Se la velocità iniziale è inferiore a 0.18 m/s (valore della velocità limite) la spira non riesce a superare il magnete.

Facciamo un esempio con $v_0=0.10\frac{m}{s}$.
Troviamo il tempo necessario per attraversare completamente il campo magnetico permanente ragionando come nel punto 4):

La spira attraversa completamente il magnete quando $x=2L$, quindi:

$$2L=v_0\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right);\ \frac{2L}{v_0\tau}=1-e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad e^{-\frac{t}{\tau}}=1-\frac{2L}{v_0\tau};\ \ e^{-\frac{t}{0.55}}=1-\frac{0.1}{0.10\cdot 0.55}=-0.8,$$
che è impossibile.

Osserviamo che deve essere:

$$1-\frac{2L}{v_0\tau}>0,\ \ 1>\frac{2L}{v_0\tau},\ \ v_0>\frac{2L}{\tau},\ \ quindi\ v_0>\frac{0.1\ m}{0.55\ s}\cong 0.18\ m/s$$ come già detto.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri