SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 1

Fissati due parametri reali $S > 0$, $k > 0$, *considera la funzione:*

$$f_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k .

La funzione $f_k(x)$ *può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.*

1)

Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ *si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore S, dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.*

La funzione è definita e continua su tutto R e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{S}{1+e^{-kx}} = 0^+ \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{S}{1+e^{-kx}} = S^-$$

Valutiamo la monotonia della funzione:

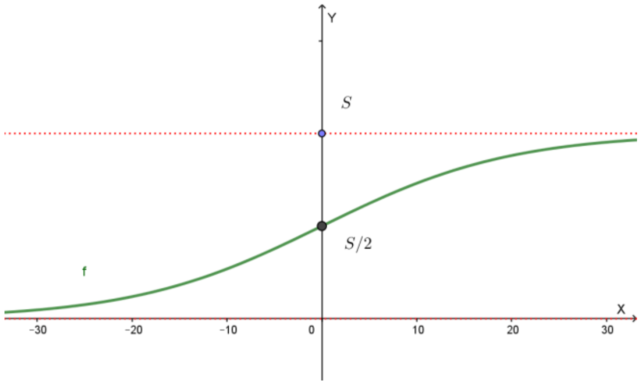
$$f'(x) = \frac{-S(-ke^{-kx})}{(1+e^{-kx})^2} = \frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2} > 0 \ \ per\ ogni\ x:$$

La funzione è quindi strettamente crescente in tutto il dominio ed ha come codominio l'intervallo aperto $(0;\ S)$, dove S è il valore al di sotto del quale si mantiene la popolazione.

2)

Osservando Γ_k, *individua la trasformazione geometrica da applicare a* Γ_k *per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.*

Oltre a quanto detto nel punto precedente osserviamo che il grafico della funzione taglia l'asse delle ordinate in $(0; S/2)$. Il grafico è quindi del tipo:



Consideriamo la traslazione di vettore $\vec{v}=\left(0;-\frac{S}{2}\right)$:

$$\begin{cases} X=x \\ Y=y-\frac{S}{2} \end{cases};\ \begin{cases} x=X \\ y=Y+\frac{S}{2} \end{cases}$$

Applicando questa trasformazione a Γ_k otteniamo l'equazione:

$$Y+\frac{S}{2}=\frac{S}{1+e^{-kX}}\ ,\quad Y=\frac{2S-S(1+e^{-kX})}{2(1+e^{-kX})}=\frac{S-Se^{-kX}}{2(1+e^{-kX})}=\frac{S}{2}\cdot\frac{1-e^{-kX}}{1+e^{-kX}}=\frac{S}{2}\cdot\frac{e^{kX}-1}{e^{kX}+1}$$

Verifichiamo che $Y=\frac{S}{2}\cdot\frac{1-e^{-kX}}{1+e^{-kX}}$ è dispari, dimostrando che la trasformazione che muta Y in -Y e X in -X lascia inalterata l'equazione:

$$-Y=\frac{S}{2}\cdot\frac{1-e^{kX}}{1+e^{kX}}\ ,\qquad Y=\frac{S}{2}\cdot\frac{e^{kX}-1}{1+e^{kX}}$$

La trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari è la traslazione di vettore $\vec{v}=\left(0;-\frac{S}{2}\right)$, e l'espressione analitica della funzione che si ottiene è: $Y=\frac{S}{2}\cdot\frac{e^{kX}-1}{1+e^{kX}}$.

Notiamo che quest'ultima funzione, dispari, presenta in (0; 0) un flesso, quindi $f_k(x)$ ha in $\left(0;\frac{S}{2}\right)$ un flesso.

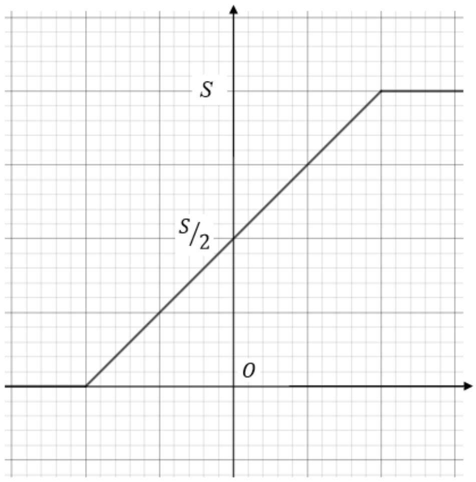
3)

Individua graficamente o analiticamente il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri S e k, il valore di tale velocità massima.

La velocità di crescita è data dalla derivata prima di $f_k(x)$. Analizzando grafico di $f_k(x)$ si osserva che la derivata seconda è positiva per x<0, negativa per x>0 e nulla per x=0 (dove c'è un flesso): la derivata prima di $f_k(x)$ è quindi crescente per x<0 e decrescente per x>0: in x=0 assume il valore massimo. Sostituendo in $f_k'(x)=\frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ otteniamo: $f_k'(0)=\frac{kS}{4}$.

Quindi: il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$ è x=0 ed il valore della massima velocità di crescita è $\frac{kS}{4}$.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$, il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 *a* S *con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di* Γ_k *nel punto di ascissa* 0.

4)

Determina, in funzione dei parametri S e k, l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.

La pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0 è $f_k'(0) = \frac{kS}{4}$. Questo valore è uguale al coefficiente angolare della retta che corrisponde alla rampa lineare, passante per $\left(0; \frac{S}{2}\right)$; la rampa ha quindi equazione:

$$y - \frac{s}{2} = \frac{kS}{4}x, \quad y = \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2}; \quad se\ y = 0\ si\ ha:\ x = -\frac{2}{k}\ ; \quad se\ y = S, \qquad x = \frac{2}{k}$$

Quindi si ha:

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < -\frac{2}{k} \\ \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2}, & se\ -\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k} \\ S, & se\ x > \frac{2}{k} \end{cases}$$

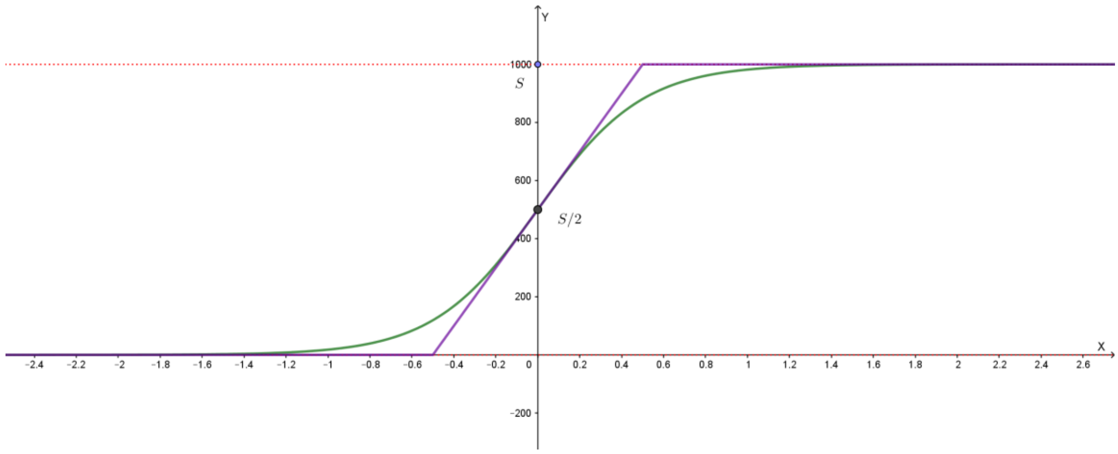
Osserviamo che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$.

5)

Illustra il procedimento che adotteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.

$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

Confrontiamo i grafici delle due funzioni (per esemplificare abbiamo posto S=1000 e k=4):



Abbiamo già osservato che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$, quindi essa approssima $f_k(x)$ in un intorno dell'origine, come $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$. Inoltre se $x = \frac{2}{k}$ $g_k(x)$ vale S, mentre $f_k(x)$ vale $\frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$.

In particolare, nel nostro esempio, in cui S=1000 e k=4, per x=1 risulta approssimativamente f(1)=982 e g(1)=1000. Quindi g ed f per $|x| > 1$ tendono ad avere valori molto vicini:

possiamo concludere che $g_k(x)$ fornisce un'approssimazione accettabile di $f_k(x)$.

6)

All'aumentare di k, tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

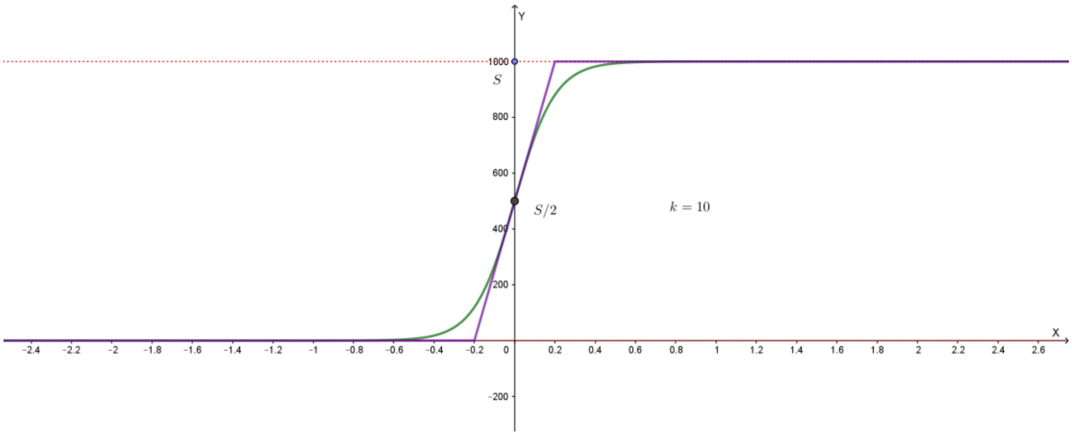
Abbiamo già detto che $g_k(x)$, in $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$, è la tangente nel punto di flesso di $f_k(x)$, quindi essa approssima $f_k(x)$ in un intorno dell'origine, quale $-\frac{2}{k} \leq x \leq \frac{2}{k}$. Più è piccolo tale intervallo, migliore sarà l'approssimazione; tale intervallo è tanto più piccolo quanto più k è grande quindi:

al crescere di k l'approssimazione di f con g migliora.

Facciamo un'altra considerazione.

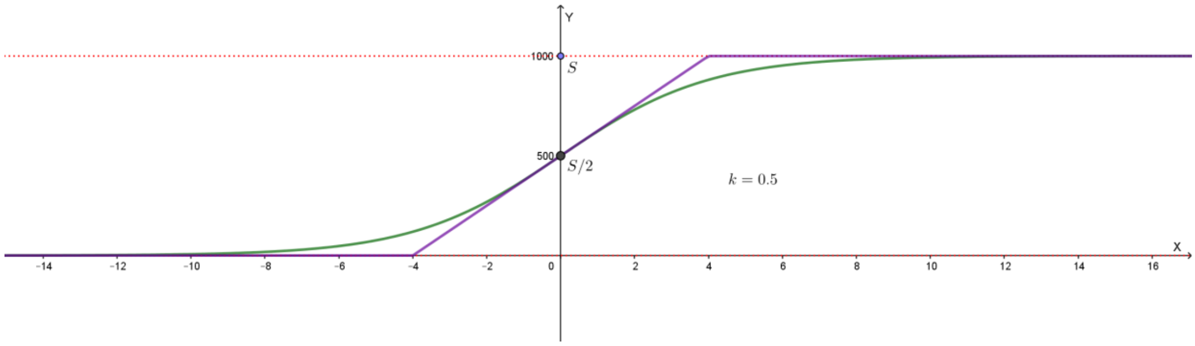
Fissato per esempio S=1000 abbiamo visto la relazione grafica fra g ed f per k=4 ed i valori assunti per x=1.

Per k=10 abbiamo:



E risulta approssimativamente f(1)=999.95 e g(1)=1000: praticamente uguali. Quindi g approssima molto bene f per $|x| > 1$.

Per k=0.5 abbiamo circa f(1)=622 e g(1)=625: quindi g approssima meno bene dei casi precedenti f per $|x| > 1$.



Osserviamo infine che la g vale S per x=2/k. Inoltre:

Se k=0.5, g vale S per x=4. Per x=4 si ha: $f_k(4) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Se k=4, g vale S per x=0.5. Per x=0.5 si ha: $f_k(0.5) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Se k=10, g vale S per x=0.2. Per x=0.2 si ha: $f_k(0.2) = \frac{S}{1+e^{-2}} \cong \frac{S}{1.14}$

Ciò conferma che g ed f tendono ad avere lo stesso valore per x sempre più piccolo al crescere di k, a conferma che al crescere di k migliora l'approssimazione di f con g.

Con la collaborazione di Angela Santamaria