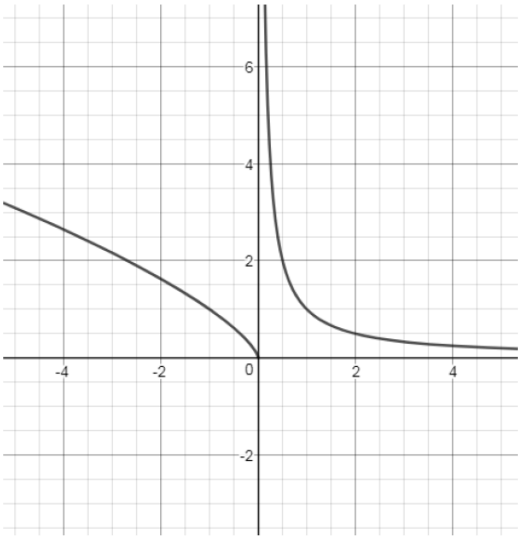
SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018

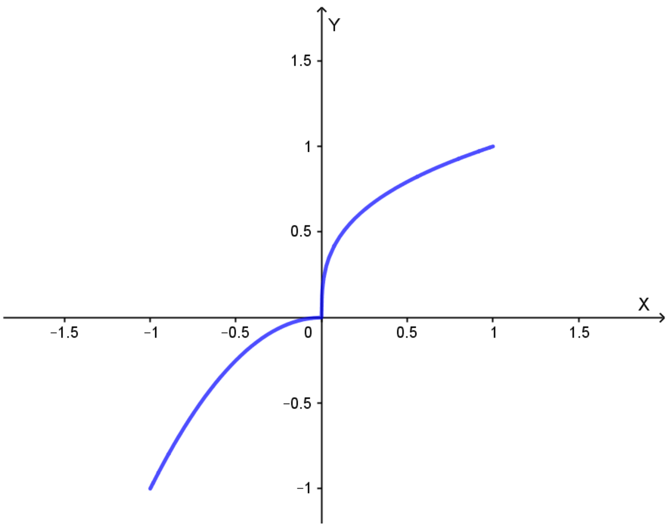
Tema di MATEMATICA - QUESTIONARIO

Q 1

In figura è riportato il grafico della funzione $f'(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Il grafico presenta un asintoto verticale per $x = 0$. Supponendo che la funzione f sia definita in $\mathbb{R}$, descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



Risulta: $f'_+(0) = +\infty$ ed $f'_-(0) = 0^+$: quindi la funzione non è derivabile in x=0, dove c'è un punto angoloso.
Osserviamo che la derivata è positiva per ogni $x \neq 0$, quindi la funzione è sempre crescente.
Inoltre f' è decrescente, quindi $f'' < 0$ (per x diverso da 0): il grafico di f ha la concavità verso il basso:



Q 2

Individua il valore di k per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

forma un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse delle ascisse.

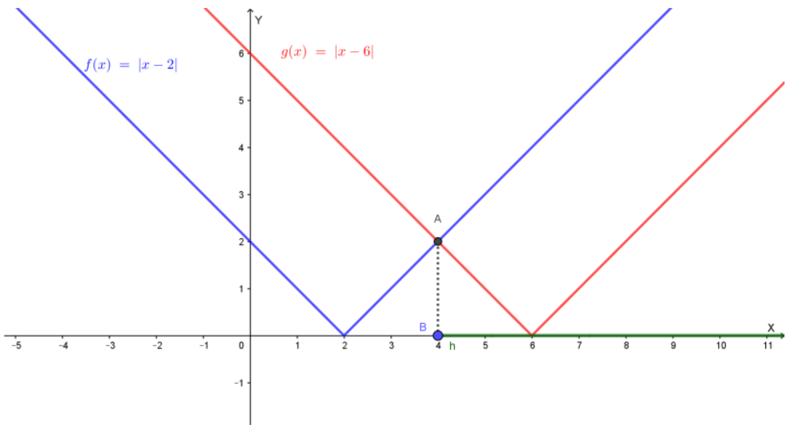
Calcoliamo la derivata prima della funzione: $f'(x) = \frac{x-k-x}{(x-k)^2} = \frac{-k}{(x-k)^2}$; $f'(0) = -\frac{1}{k}$
Ma $f'(0) = tg(\alpha)$, essendo α l'angolo formato dalla tangente con l'asse x.
Deve quindi essere:
$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{k}$, *da cui*: $k = -\sqrt{3}$.

Q 3

Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x-2| > |x-6|$$

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le funzioni: $f(x) = |x-2|$ *e* $g(x) = |x-6|$



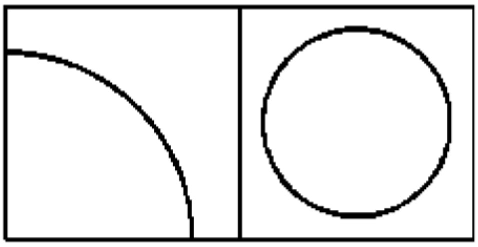
La disequazione è verificata per i valori di x tali che il grafico di f stia sopra il grafico di g:

$$x > x_A: \qquad x > 4.$$

Per trovare x_A: $\begin{cases} y = x-2 \\ y = -x+6 \end{cases}$: $x-2 = -x+6$, $x = 4$.

Q 4

Il cerchio di raggio R centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio r centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto R/r.



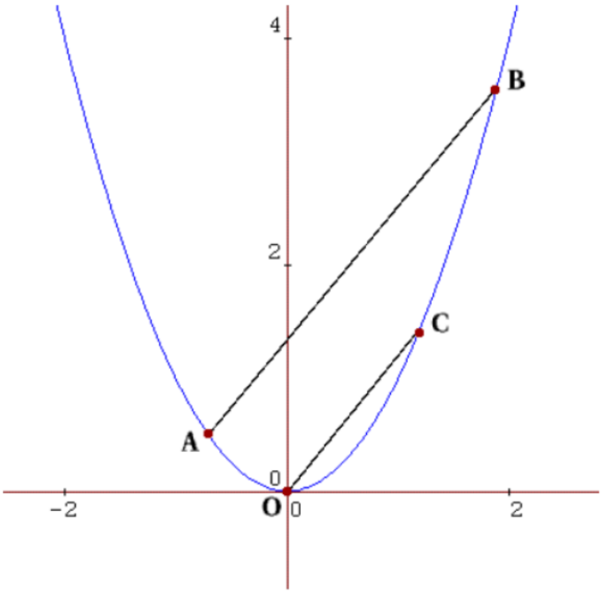
Detto L il lato dei due quadrati e C_1 e C_2 i cerchi di raggi R ed r rispettivamente, si ha:

$Area(C_1) = \pi R^2$, $Area(C_2) = \pi r^2$. Dette S_1 ed S_2 le aree delle due parti occupate dai cerchi nei due quadrati, si ha:

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2}L^2 \ ; \quad S_2 = \pi r^2 = \frac{1}{2}L^2 \ , \qquad quindi: \ \frac{1}{4}\pi R^2 = \pi r^2 \ , \qquad \frac{1}{4}R^2 = r^2 \ : \ \frac{R}{r} = 2$$

Q 5

Presi due punti $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$ sulla parabola $y = x^2$, traccia la retta OC, parallela alla retta AB e passante per l'origine e per il punto $C(c, c^2)$.



Dimostra che $a + b = c$.

Traccia un'altra parallela DE, passante per due punti D ed E appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

Calcoliamo i coefficienti angolare delle rette AB e OC ed uguagliamoli:

$$m_{AB} = \frac{b^2 - a^2}{b - a}, \qquad m_{OC} = \frac{c^2}{c}: \quad \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{c^2}{c}, \qquad b + a = c \;\; (con\; b \neq a \;\; e \;\; c \neq 0)$$

Sia ora $D = (d; d^2)\; e \;\; E = (e; e^2)$.
In base a quanto dimostrato sopra, risulta: $d + e = c = a + b$.
Calcoliamo i punti medi M, N e P dei tre segmenti AB, OC e DE:

$$M = \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a^2+b^2}{2}\right), \qquad N = \left(\frac{c}{2}; \frac{c^2}{2}\right), \qquad P = \left(\frac{d+e}{2}; \frac{d^2+e^2}{2}\right).$$

Siccome $a + b = d + e = c,\;\; risulta: \frac{a+b}{2} = \frac{d+e}{2} = \frac{c}{2}$, quindi i punti M, N e P appartengono alla stessa retta $x = \frac{c}{2}$.

Q 6

Il grafico della funzione polinomiale cubica $y = f(x)$ intercetta l'asse x nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.

La funzione ha equazione del tipo:

$$y = f(x) = a(x - 10)(x - 100)(x - 1000)$$

Ricordiamo che ogni cubica ha uno ed un solo flesso, ottenuto annullando la derivata seconda:
$f'(x) = a(x - 100)(x - 1000) + a(x - 10)(x - 1000) + a(x - 10)(x - 100) =$
$= a(3x^2 - 2220x + 111000)$
$f''(x) = a(6x - 2220) = 0 \;\; se \;\; x = \frac{2220}{6} = 370$
L'ascissa del punto di flesso è indipendente da a, ma l'ordinata, f(370), dipende da a:
le informazioni date non sono sufficienti per individuare le coordinate del punto di flesso.

Q 7

Una sfera, il cui centro è il punto $K(1, 0, 1)$, è tangente al piano Π avente equazione $x - 2y + z + 1 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Il punto di tangenza T si ottiene intersecando la normale al piano tangente con la perpendicolare n ad esso condotta dal centro della sfera. La normale al piano di equazione $x - 2y + z + 1 = 0$ ha parametri direttori (1, -2, 1). Quindi:

$$n: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Intersecando n con il piano tangente abbiamo:

$1 + t - 2(-2t) + (1 + t) + 1 = 0, \;\; 6t = -3\,, \qquad t = -\dfrac{1}{2}$

Sostituendo in n otteniamo il punto di tangenza: $T = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Il raggio R della sfera può essere calcolato come distanza del centro dal piano tangente, oppure come distanza tra K e T:

$$R = KT = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

Come distanza di K dal piano tangente:

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 0 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

Q 8

Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

La probabilità di ottenere una testa ed una croce (a prescindere dall'ordine) lanciando due volte una moneta (non truccata) è data da:

$p(TC) + p(CT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\ \%$. Utilizzando la distribuzione binomiale (n=2 prove, k=1 successo con probabilità ½ , l'uscita della T in 1 lancio):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci è:

$$p(TTCC) + p(TCTC) + p(TCCT) + p(CTTC) + p(CTCT) + p(CCTT) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$$

Utilizzando la distribuzione binomiale (n=4, k=2: 2volte T, p=1/2):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Quindi se la moneta viene lanciata 4 volte la probabilità di ottenere due teste e due croci non è ancora pari al 50 %.

Con la collaborazione di Angela Santamaria