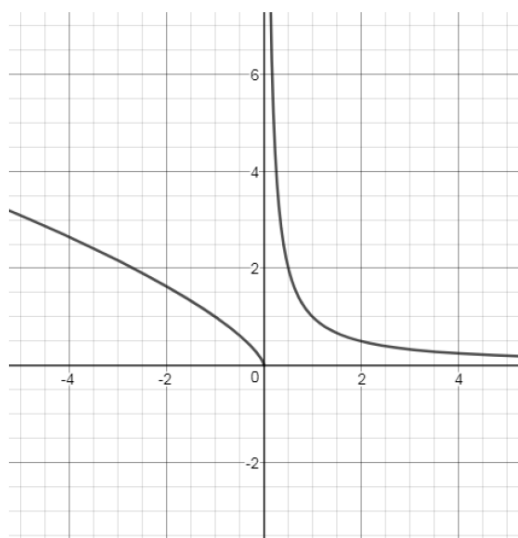


**SECONDA PROVA SCRITTA – ESEMPIO MINISTERIALE DICEMBRE 2018**

**Tema di MATEMATICA - QUESTIONARIO**

**Q 1**

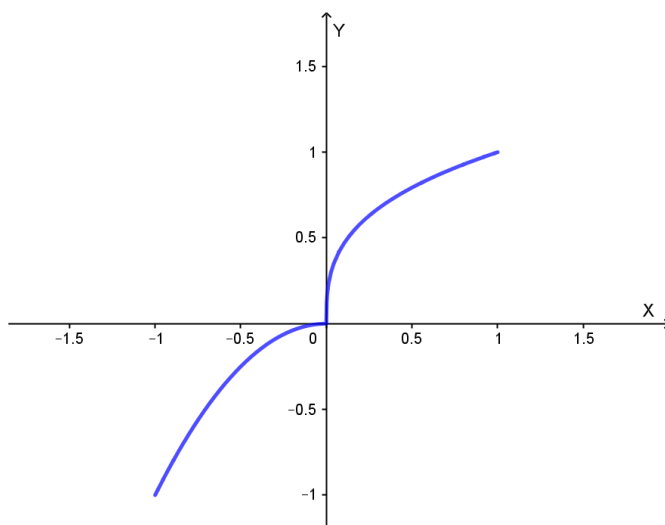
In figura è riportato il grafico della funzione  $f'(x)$ , derivata della funzione  $f(x)$ . Il grafico presenta un asintoto verticale per  $x = 0$ . Supponendo che la funzione  $f$  sia definita in  $\mathbb{R}$ , descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



Risulta:  $f'_+(0) = +\infty$  ed  $f'_-(0) = 0^+$ : quindi la funzione non è derivabile in  $x=0$ , dove c'è un punto angoloso.

Osserviamo che la derivata è positiva per ogni  $x \neq 0$ , quindi la funzione è sempre crescente.

Inoltre  $f'$  è decrescente, quindi  $f'' < 0$  (per  $x$  diverso da 0): il grafico di  $f$  ha la concavità verso il basso:



## Q 2

Individua il valore di  $k$  per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

forma un angolo di  $\pi/6$  radianti con l'asse delle ascisse.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:  $f'(x) = \frac{x-k-x}{(x-k)^2} = \frac{-k}{(x-k)^2}$ ;  $f'(0) = -\frac{1}{k}$

Ma  $f'(0) = \operatorname{tg}(\alpha)$ , essendo  $\alpha$  l'angolo formato dalla tangente con l'asse  $x$ .

Deve quindi essere:

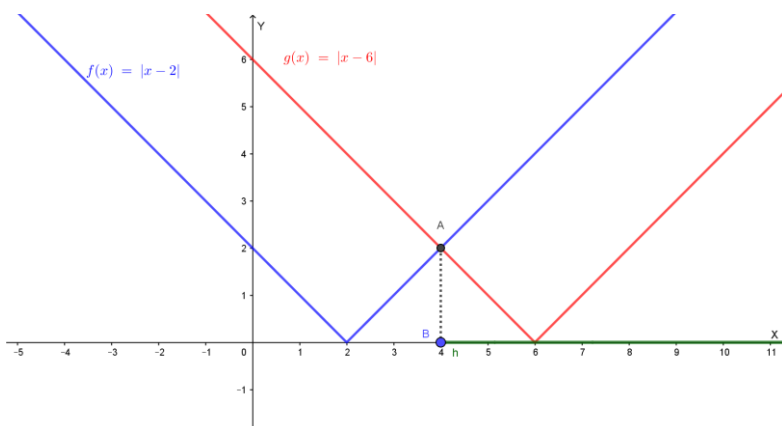
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{k}, \text{ da cui: } k = -\sqrt{3}.$$

## Q 3

Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x-2| > |x-6|$$

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le funzioni:  $f(x) = |x-2|$  e  $g(x) = |x-6|$



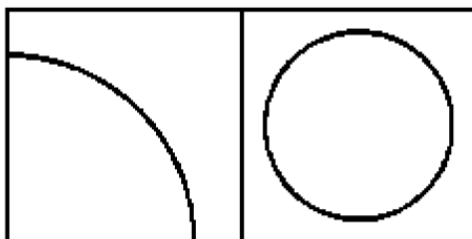
La disequazione è verificata per i valori di  $x$  tali che il grafico di  $f$  stia sopra il grafico di  $g$ :

$$x > x_A: \quad x > 4.$$

Per trovare  $x_A$ :  $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} : x - 2 = -x + 6, x = 4.$

#### Q 4

Il cerchio di raggio  $R$  centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio  $r$  centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto  $R/r$ .



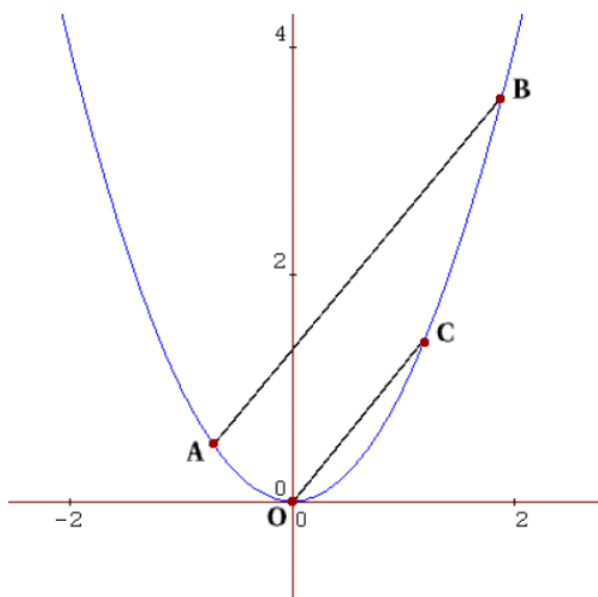
Detto  $L$  il lato dei due quadrati e  $C_1$  e  $C_2$  i cerchi di raggi  $R$  ed  $r$  rispettivamente, si ha:

$Area(C_1) = \pi R^2$ ,  $Area(C_2) = \pi r^2$ . Dette  $S_1$  ed  $S_2$  le aree delle due parti occupate dai cerchi nei due quadrati, si ha:

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2}L^2; \quad S_2 = \pi r^2 = \frac{1}{2}L^2, \quad \text{quindi: } \frac{1}{4}\pi R^2 = \pi r^2, \quad \frac{1}{4}R^2 = r^2 : \frac{R}{r} = 2$$

#### Q 5

Presi due punti  $A(a, a^2)$  e  $B(b, b^2)$  sulla parabola  $y = x^2$ , traccia la retta  $OC$ , parallela alla retta  $AB$  e passante per l'origine e per il punto  $C(c, c^2)$ .



Dimostra che  $a + b = c$ .

Traccia un'altra parallela  $DE$ , passante per due punti  $D$  ed  $E$  appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

Calcoliamo i coefficienti angolare delle rette  $AB$  e  $OC$  ed uguagliamoli:

$$m_{AB} = \frac{b^2 - a^2}{b - a}, \quad m_{OC} = \frac{c^2}{c} : \quad \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{c^2}{c}, \quad b + a = c \text{ (con } b \neq a \text{ e } c \neq 0)$$

Sia ora  $D = (d; d^2)$  e  $E = (e; e^2)$ .

In base a quanto dimostrato sopra, risulta:  $d + e = c = a + b$ .

Calcoliamo i punti medi  $M$ ,  $N$  e  $P$  dei tre segmenti  $AB$ ,  $OC$  e  $DE$ :

$$M = \left( \frac{a + b}{2}; \frac{a^2 + b^2}{2} \right), \quad N = \left( \frac{c}{2}; \frac{c^2}{2} \right), \quad P = \left( \frac{d + e}{2}; \frac{d^2 + e^2}{2} \right).$$

Siccome  $a + b = d + e = c$ , risulta:  $\frac{a+b}{2} = \frac{d+e}{2} = \frac{c}{2}$ , quindi i punti  $M$ ,  $N$  e  $P$  appartengono alla stessa retta  $x = \frac{c}{2}$ .

### Q 6

Il grafico della funzione polinomiale cubica  $y = f(x)$  intercetta l'asse  $x$  nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.

La funzione ha equazione del tipo:

$$y = f(x) = a(x - 10)(x - 100)(x - 1000)$$

Ricordiamo che ogni cubica ha uno ed un solo flesso, ottenuto annullando la derivata seconda:

$$f'(x) = a(x - 100)(x - 1000) + a(x - 10)(x - 1000) + a(x - 10)(x - 100) = \\ = a(3x^2 - 2220x + 111000)$$

$$f''(x) = a(6x - 2220) = 0 \text{ se } x = \frac{2220}{6} = 370$$

L'ascissa del punto di flesso è indipendente da  $a$ , ma l'ordinata,  $f(370)$ , dipende da  $a$ :

le informazioni date non sono sufficienti per individuare le coordinate del punto di flesso.

### Q 7

Una sfera, il cui centro è il punto  $K(1, 0, 1)$ , è tangente al piano  $\Pi$  avente equazione  $x - 2y + z + 1 = 0$ . Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Il punto di tangenza  $T$  si ottiene intersecando la normale al piano tangente con la perpendicolare ad esso condotta dal centro della sfera. La normale al piano di equazione  $x - 2y + z + 1 = 0$  ha parametri direttori  $(1, -2, 1)$ . Quindi:

$$n: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Intersecando n con il piano tangente abbiamo:

$$1 + t - 2(-2t) + (1 + t) + 1 = 0, \quad 6t = -3, \quad t = -\frac{1}{2}$$

Sostituendo in n otteniamo il punto di tangenza:  $T = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Il raggio R della sfera può essere calcolato come distanza del centro dal piano tangente, oppure come distanza tra K e T:

$$R = KT = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

Come distanza di K dal piano tangente:

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 0 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = R$$

### Q 8

Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

La probabilità di ottenere una testa ed una croce (a prescindere dall'ordine) lanciando due volte una moneta (non truccata) è data da:

$p(TC) + p(CT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$ . Utilizzando la distribuzione binomiale (n=2 prove, k=1 successo con probabilità  $\frac{1}{2}$ , l'uscita della T in 1 lancio):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci è:

$$p(TTCC) + p(TCTC) + p(TCCT) + p(CTTC) + p(CTCT) + p(CCTT) = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$$

Utilizzando la distribuzione binomiale (n=4, k=2: 2 volte T, p=1/2):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Quindi se la moneta viene lanciata 4 volte la probabilità di ottenere due teste e due croci non è ancora pari al 50%.

*Con la collaborazione di Angela Santamaria*