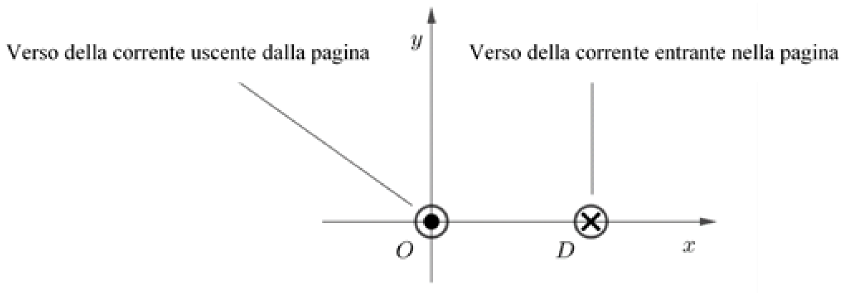
SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA e FISICA

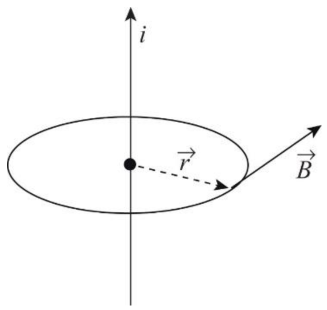
PROBLEMA 1

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale Oxy, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1,0)$*, come mostrato in figura.*



Per la legge di Biot-Savart, in un punto a distanza r da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente elettrica di intensità i si genera un campo magnetico $\vec{B}$ di intensità:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \ , con \ \ \mu_0 = 4\pi \ 10^{-7} \frac{N}{A^2} = T \cdot \frac{m}{A}$$



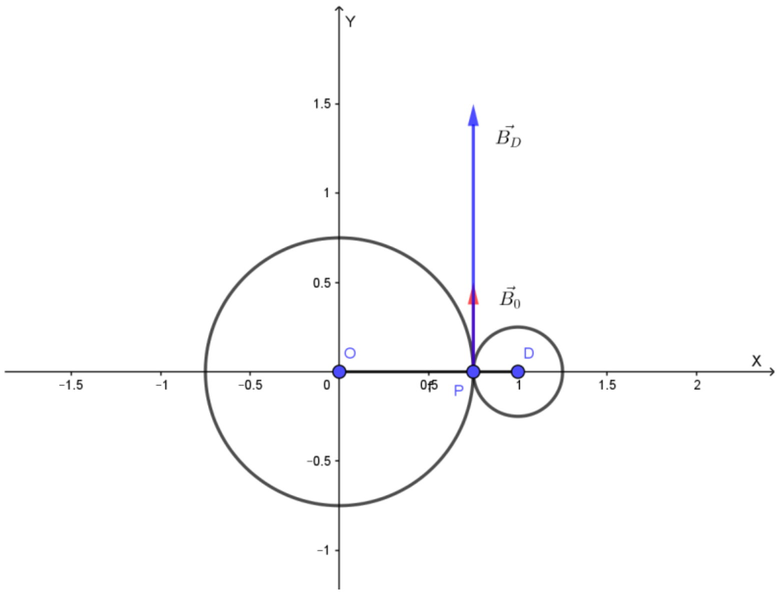
1)

Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$*, espresso in tesla (T), in un punto* $P(x,0)$*, con* $0 < x < 1$*, è data dalla funzione* $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$*, dove* K *è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore* $\vec{B}$ *al variare di* x *nell'intervallo* $(0,1)$*. Per quale valore di* x *l'intensità di* $\vec{B}$ *è minima?*

Nel punto P i campi magnetici generati dai due fili hanno intensità rispettivamente:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \quad , \quad diretto\ nel\ verso\ positivo\ dell'asse y$$

$$B_D = \frac{\mu_0 i}{2\pi(1-x)} \quad , \quad diretto\ nel\ verso\ positivo\ dell'asse y$$



Il campo totale in P, diretto nel verso positivo dell'asse y, ha intensità:

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(1-x)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \quad , \qquad 0 < x < 1, \ \ k = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

L'unità di misura di k è: $\frac{N}{A^2} \cdot A = \frac{N}{A} = \left(T \cdot \frac{m}{A}\right) \cdot A = T \cdot m$

B è minimo quando lo è $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$; questa espressione è minima quando z=x(1-x) è massima. Essendo x+(1-x)=1=costante, ricordando che il prodotto di due grandezze positive a somma costante è massimo quando le due grandezze sono uguali, z=x(1-x) è massimo quando $x = 1 - x, \ \ x = \frac{1}{2}$: $y\ (e\ quindi\ B) è\ minima\ se\ x = \frac{1}{2}$. Oppure: $z' = -2x + 1 \geq 0 \ \ se\ x \leq \frac{1}{2}$ quindi z cresce se 0<x<1/2 e decresce se 1/2<x<1: z è massima se x=1/2 e quindi y e B sono minimi se x=1/2.

Lo stesso risultato si ottiene studiando la derivata prima di y:

$$y = \frac{1}{x(1-x)} \ , \ldots , \qquad y' = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0 \ \ se \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

Quindi y è crescente per $\frac{1}{2} < x < 1$ e decrescente per $0 < x < \frac{1}{2}$: y è minima quando $x = \frac{1}{2}$.

L'intensità di $\vec{B}$ in P è minima quando $x = \frac{1}{2}$ $\ (B_{minimo} = 4k)$.

2)

Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x=\frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

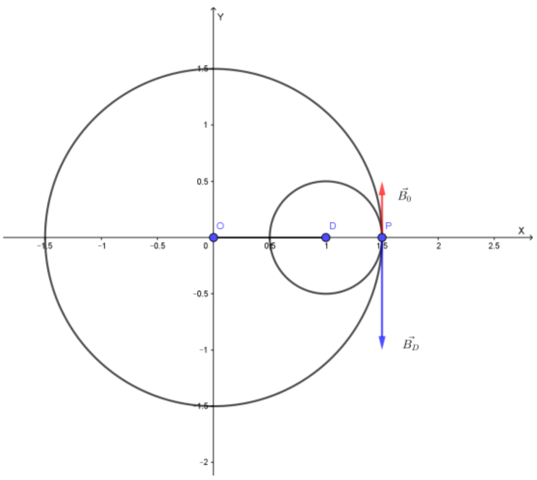
La carica è immessa in un campo magnetico nella stessa direzione del campo, quindi per la legge di Lorentz è soggetta alla forza: $\vec{F}=q\,\vec{v_0}\wedge\vec{B}$ la cui intensità è nulla, essendo:
$F=qv_0B\,sen\alpha=0\,,\;\; perch\grave{e}\;\;\alpha=0\;\;oppure\;\;\alpha=\pi.$

La carica si muove quindi lungo la retta di equazione $x=\frac{1}{2}$ con velocità costante v_0 .

In un punto a destra di D (x>1), il campo generato dalla corrente uscente da O è diretto nel verso positivo dell'asse y e quello generato dalla corrente entrante in D è diretto nel verso negativo dell'asse y e risulta: $B_D>B_0$ (essendo l'intensità della corrente uguale e la distanza da O maggiore della distanza da D). Quindi:

a destra di D si ha un campo diretto nel verso negativo dell'asse y, di modulo:

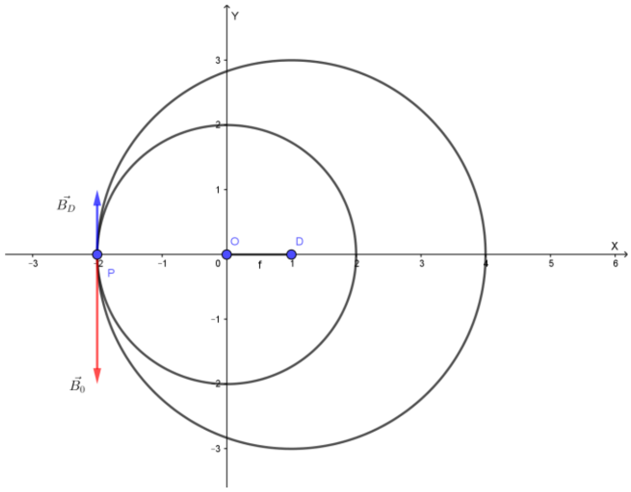
$$B=B_D-B_0=\frac{k}{x-1}-\frac{k}{x}=\frac{k}{x(x-1)}\quad,\quad con\;\;x>1\,.$$



In un punto a sinistra di O (x<0), il campo generato dalla corrente uscente da O è diretto nel verso negativo dell'asse y e quello generato dalla corrente entrante in D è diretto nel verso positivo dell'asse y e risulta: $B_D<B_0$ (essendo l'intensità della corrente uguale e la distanza da O minore della distanza da D). Quindi:

a sinistra di O si ha un campo diretto nel verso negativo dell'asse y, di modulo:

$$B = B_0 - B_D = \frac{k}{-x} - \frac{k}{1-x} = \frac{k}{x(x-1)} \quad , \quad con \;\; x < 0\,.$$



Quindi esternamente al segmento OD il campo è sempre diretto nel verso negativo dell'asse y ed ha intensità:

$$B = \frac{k}{x(x-1)} \;, \quad con \;\; x < 0 \;\; oppure \; x > 1$$

Da tale espressione si deduce che NON ESISTONO punti esterni ad OD in cui il campo è nullo (è sempre diretto nel verso negativo dell'asse y e non ha mai modulo nullo).

Internamente al segmento OD abbiamo visto che il campo è sempre diretto nel verso positivo dell'asse y ed il suo modulo (MAI NULLO) è:

$$B = k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{k}{x(1-x)} \;, \qquad con\; 0 < x < 1$$

Non esistono quindi punti dell'asse x in cui il campo sia nullo.

3)

Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ *dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta* r *tangente al grafico di* f *nel suo punto di ascissa* $\frac{1}{3}$ *e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra* r *e il grafico di* f.

$$\boldsymbol{y = f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = k\frac{1}{x(1-x)}}$$

Dominio: $-\infty < x < 0,\; 0 < x < 1,\; 1 < x < +\infty$

La funzione è continua e derivabile per ogni x diversa da 0 e 1 e, visto il dominio, non può essere né pari né dispari. Non ci sono intersezioni con gli assi e risulta:

$y > 0 \quad se \quad x(1-x) > 0, \quad 0 < x < 1$

Limiti:

$$\lim_{x \to \mp\infty} k\frac{1}{x(1-x)} = 0^- \quad : \quad y = 0 \;\; asintoto\; per\; x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} k\frac{1}{x(1-x)} = \pm\infty \quad : \quad x = 0\; asintoto$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} k\frac{1}{x(1-x)} = \mp\infty \quad : \quad x = 1\; asintoto$$

Abbiamo già studiato la derivata:

$$y' = k\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq \frac{1}{2} \quad , \quad x \neq 1$$

Quindi y è crescente per $\frac{1}{2} < x < 1 \;\; e \;\; x > 1$ e decrescente per $x < 0 \;\; e\; 0 < x < \frac{1}{2}$: y è minima quando $x = \frac{1}{2}$ ed il minimo è: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4k$.

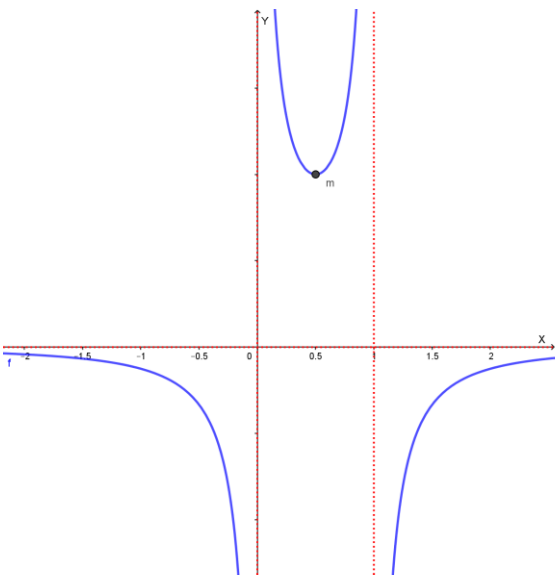
Studio derivata seconda. Risulta:

$$y'' = k\frac{2x(1-x)(3x^2-3x+1)}{x^4(1-x)^4}$$

Essendo $3x^2 - 3x + 1 > 0 \; per\; ogni\; x$, nel dominio si ha $y'' \geq 0 \;\; se \;\; x(1-x) > 0, \;\; 0 < x < 1$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se 0<x<1 e verso il basso se x<0 e x>1 .
Non esistono flessi.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Cerchiamo ora la tangente nel punto di ascissa x=1/3.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}k\ ,\quad f'\left(\frac{1}{3}\right)=k\,\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{27}{4}k$$

La retta r ha quindi equazione:

$$r:\ y-\frac{9}{2}k=-\frac{27}{4}k\left(x-\frac{1}{3}\right)\ ,\quad y=-\frac{27}{4}kx+\frac{27}{4}k\ ,\qquad y=-\frac{27}{4}k(x-1).$$

Ulteriore intersezione di r con il grafico di f:

$$\begin{cases} y=-\frac{27}{4}k(x-1) \\ y=k\frac{1}{x(1-x)} \end{cases}\ ,\quad k\frac{1}{x(1-x)}=-\frac{27}{4}k(x-1)\ ,\qquad 4=27x(x-1)^2\ ,$$

$$27x^3-54\,x^2+27\,x-4=0$$

Abbassando di grado due volte con x=1/3 (radice doppia), si ha:

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(27x-36)=0$. Quindi l'intersezione richiesta ha ascissa $x=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$. E risulta:

$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{4}k$: ulteriore intersezione di r col grafico di f $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{9}{4}k\right)$.

4)

Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t\geq 2$, *l'integrale*

$$g(t)=\int_2^t |f(x)|\,dx$$

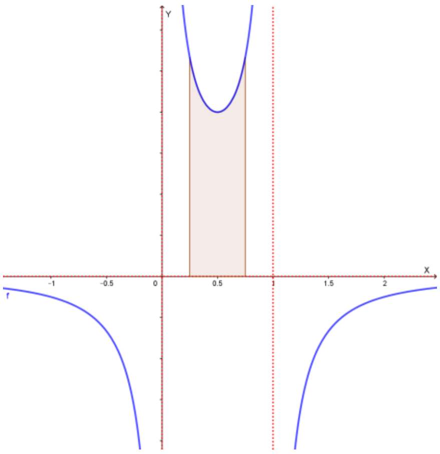
e calcolare $\lim_{t\to+\infty} g(t)$. *Qual è il significato di tale limite?*

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx=\int_{1/4}^{3/4} k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(1-x)}\right)dx=k\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$= k[ln|x| - ln|x-1|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = k\left[ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{1}{4}\right) - \left(ln\left(\frac{1}{4}\right) - ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right] =$$

$$= k\left[2\,ln\left(\frac{3}{4}\right) - 2ln\,\left(\frac{1}{4}\right)\right] = 2k\left(ln\left(\frac{3}{4}\right) - ln\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 2k\,\left(ln\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = 2kln(3)$$

Tale valore rappresenta l'area del trapezoide compreso fra il grafico di f, le rette x=1/4 e x=3/4 e l'asse x.



Calcoliamo ora, per $t \geq 2,$ l'integrale:

$$g(t) = \int_2^t |f(x)|\,dx$$

Notiamo che se t=2 risulta g(2)=0.

Osserviamo poi che per $x \geq 2\ \ risulta\ f(x) < 0$, quindi (per t>2):

$$g(t) = \int_2^t \big(-f(x)\big)dx = -k\int_2^t \frac{1}{x(1-x)}\,dx = -k[ln|x| - ln|1-x|]_2^t =$$

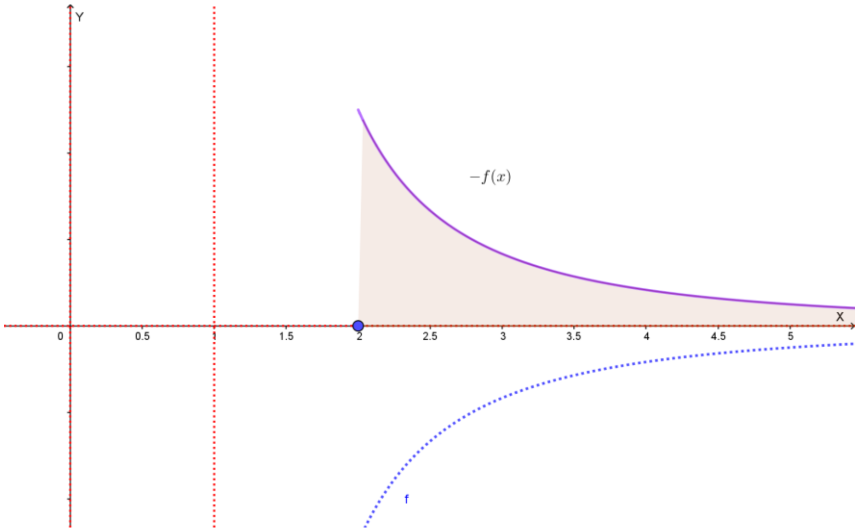
$$= -k[lnt - ln(t-1) - ln2 + 0] = -k\,ln\frac{t}{2(t-1)} = g(t)$$

(Osserviamo che in tale espressione si ritrova g(t)=0 se t=2).

Risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[-k\,ln\frac{t}{2(t-1)}\right] - kln\left(\frac{1}{2}\right) = kln(2)$$

Tale limite rappresenta l'area della regione illimitata compresa fra il grafico di y=-f(x), la retta x=2 e l'asse delle ascisse:



Con la collaborazione di Angela Santamaria