SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 02 APRILE 2019

Tema di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1)

Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

Risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(k - x) - \sqrt{x} = \frac{k - x - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{k - 3x}{2\sqrt{x}} \geq 0 \quad se \quad x \leq \frac{k}{3}, \qquad con\ x \neq 0.$$

Quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{k}{3}$ e decrescente per $\frac{k}{3} < x \leq k$: la funzione f ha quindi un massimo (unico) per $x = \frac{k}{3}$ con $f\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}$, quindi $F = \left(\frac{1}{3}k;\ \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

Analizziamo la funzione g:

$$g'(x) = 2x(x - k) + x^2 = 3x^2 - 2kx \geq 0 \quad se \quad x \leq 0 \quad vel \quad x \geq \frac{2}{3}k$$

La funzione g, nell'intervallo $[0, k]$, è quindi decrescente per $0 < x < \frac{2}{3}k$ e crescente per $\frac{2}{3}k < x \leq k$: g ha quindi un minimo (unico) per $x = \frac{2}{3}k$ con $g\left(\frac{2}{3}k\right) = -\frac{4}{27}k^3$:

$$G\left(\frac{2}{3}k;\ -\frac{4}{27}k^3\right).$$

Quindi: $x_G = \frac{2}{3}k = 2x_F = 2\left(\frac{1}{3}k\right)$, $\quad y_F^2 = \frac{4}{9}k^2 \cdot \frac{k}{3} = \frac{4}{27}k^3, perciò$: $y_G = -\frac{4}{27}k^3 = -y_F^2$

2)

Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

Risulta: $f'_+(0) \to +\infty$ (tangente verticale), $g'(0) = 0$ (tangente orizzontale): quindi le tangenti nell'origine sono ortogonali.

Cerchiamo l'ulteriore intersezione tra i grafici di f e g:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}\,(k - x) \\ y = x^2(x - k) \end{cases} \ , \quad \sqrt{x}\,(k - x) = x^2(x - k), da\ cui, oltre\ a\ x = 0, troviamo\ x = k$$

Oltre che nell'origine quindi i grafici di f e g si intersecano nel punto A=(k; 0). Risulta:

$f'(k) = -\sqrt{k}$, $g'(k) = k^2$. Deve essere $f'(k) \cdot g'(k) = -1$, $quindi$: $\left(-\sqrt{k}\right)(k^2) = -1$, $k^5 = 1$, $pertanto$ $k = 1$ (per tale valore di k i grafici di f e g sono ortogonali in A).

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. *In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni* $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$, *per* $x \in [0, 1]$, *rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.*

Per k=1 si ha:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(1 - x) \qquad e \qquad g(x) = x^2(x - 1) \quad , \quad intervallo\ [0; 1]$$

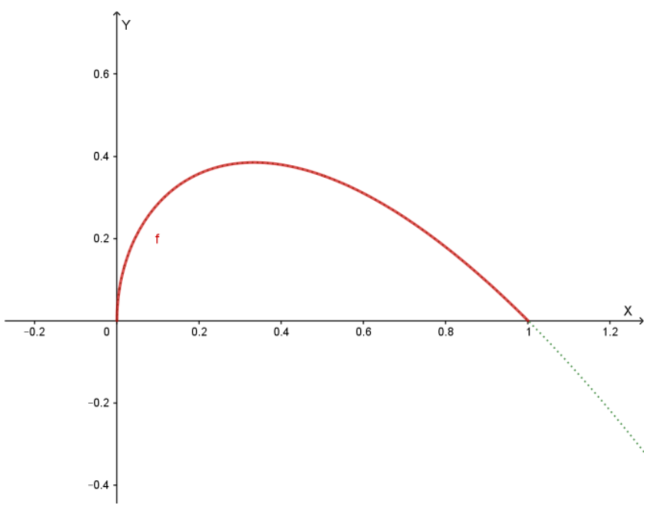
Studiamo sommariamente le due funzioni nell'intervallo richiesto.

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}\,(1 - x)}$, $\boldsymbol{0 \le x \le 1}$

Nell'intervallo richiesto la funzione è sempre non negativa ed è: $f(0) = f(1) = 0$.

La funzione è continua, non derivabile in x=0 come già visto, ed è $f'_+(0) \to +\infty$ (tangente verticale); risulta poi: $f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = -1$. Come già visto con k generico, f ha un massimo in $F = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{-3x-1}{4x\sqrt{x}} < 0\ \ in\ (0; 1]$.

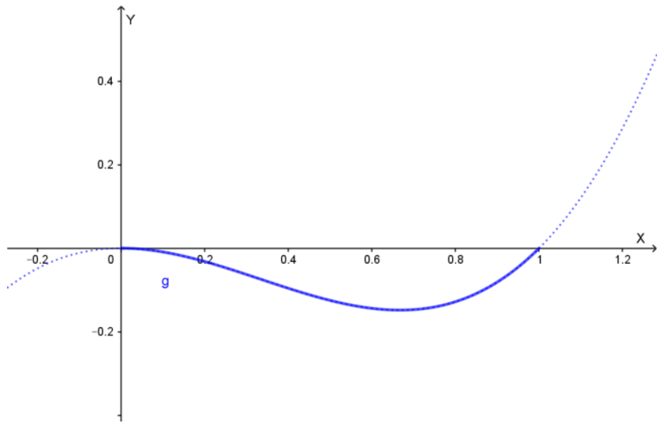
Il grafico di f è quindi del tipo:



$g(x) = x^2(x-1)\,,\quad 0 \le x \le 1$

Si tratta di una cubica, continua e derivabile su tutto R, con $g(0) = g(1) = 0$; come già visto con k generico, si ha: $g'(x) = 3x^2 - 2x$, $g'(0) = 0,\ g'(1) = 1$, $minimo\ in\ \ G = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{27}\right)$. Derivata seconda: $g''(x) = 6x - 2 \ge 0\ \ per\ \ x \ge \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}\ punto\ di\ flesso:\ \left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{27}\right)$.

Grafico di g:



Il profilo della spira è quindi il seguente:

Calcoliamo l'area della spira:

$$Area(S) = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}\,(1-x)\ - x^2(x-1)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} + x^2 - x\sqrt{x} - x^3\right] dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} + x^2 - x^{\frac{3}{2}} - x^3\right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} = (0.35)\ m^2 = Area(S)$$

3)

Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ T$, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}\ Wb$.

Il valore assoluto del flusso attraverso S è dato da:

$$\Phi_S(\overrightarrow{B_0}) = B_0\ Area(S) = B_0 S = (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ T)(0.35\ m^2) = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

4)

Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\ \Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0\ s$, inizi a variare secondo la legge:

$$B(t) = B_0\ e^{-\omega t} \cos(\omega t),\ \ con\ \ \omega = \pi\ \ rad/s$$

e $t \geq 0$ *espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.*
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

Per la legge di Fraday- Neumann-Lenz si ha:

$$i(t) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(B(t))}{dt}$$

Risulta:

$$\frac{d\Phi(B(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(B_0 S\ e^{-\omega t} \cos(\omega t)) = -\omega B_0 S\ e^{-\omega t} \cos(\omega t) - \omega B_0 S\ e^{-\omega t} sen(\omega t) =$$

$$= -\omega B_0 S\ e^{-\omega t}(\cos(\omega t) + sen(\omega t)) = -\omega B_0\ e^{-\omega t}\left(\sqrt{2} sen(\omega t + \frac{\pi}{4})\right)$$

Quindi:

$$i(t) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(B(t))}{dt} = \frac{1}{70} \cdot \omega B_0 S\ e^{-\omega t}\left(\sqrt{2} sen\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

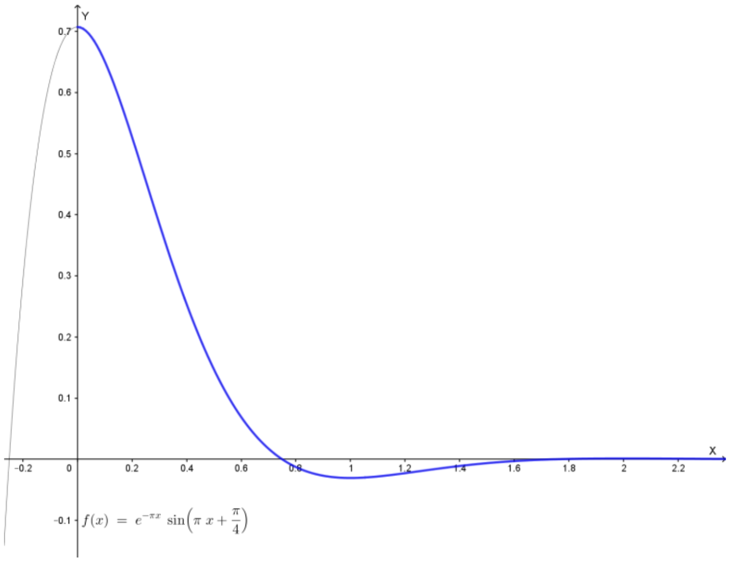
$$= \frac{\pi}{70} \cdot\ 7{,}0 \cdot 10^{-3}\ e^{-\pi t}\left(\sqrt{2} sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = (\pi \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}\left(\sqrt{2} sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\pi \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}(\cos(\pi t) + sen(\pi t))$$

La corrente cambia il verso la prima volta nel primo istante in cui si annulla, cioè quando:

$sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \qquad \pi t + \frac{\pi}{4} = k\pi, \quad t = k - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75\ s$
$(prendendo\ k = 1\ si\ ha\ il\ primo\ valore\ positivo\ di\ t)$

Osserviamo che (a meno di una costante moltiplicativa positiva) il grafico di i(t) è simile a quello della funzione $f(x) = e^{-\pi x}\ sen\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$ che è il seguente:



Per trovare il valore massimo di i cominciamo con osservare che i(t) ha infiniti massimi ed infiniti minimi relativi per effetto del fattore "smorzante" $e^{-\pi t}$ (che tende a zero per t che tende a $+\infty$): i massimi vanno diminuendo ed i minimi vanno aumentando. Il massimo di i sarà quindi il primo dei massimi relativi che si ha per t=0. Quindi:

$i_{massima} = i(0) = \ (\pi^2 \cdot 10^{-4})\ A$

Studiamo la derivata prima di $i(t) = (\pi \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}\big(cos(\pi t) + sen(\pi t)\big)$.

$i'(t) = (\pi \cdot 10^{-4})\big[-\pi\ e^{-\pi t}\big(cos(\pi t) + sen(\pi t)\big) + \ e^{-\pi t}(-\pi sen(\pi t) + \pi cos(\pi t))\big] =$

$= (\pi^2 \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t}[-2sen(\pi t)] = (-2\pi^2 \cdot 10^{-4})\ e^{-\pi t} sen(\pi t) \geq 0\ \ se\ \ sen(\pi t) \leq 0\,,$

$sen(\pi t) \leq 0: \quad \pi + 2k\pi \leq \pi t \leq 2\pi + 2k\pi, \quad 1 + 2k \leq t \leq 2 + 2k:$

se k=0: $1 \leq t \leq 2$, se k=-1: -1$\leq t \leq 0$, se k=1: $3 \leq t \leq 4$

Quindi, ricordando che $t \geq 0$, risulta:
$i'(t) > 0$ per $1 < t < 2\ \ e\ \ i'(t) \leq 0\ \ per\ \ 0 \leq t \leq 1$ quindi:
i(t) è decrescente da 0 a 1 e crescente da 1 a 2: il primo massimo (che è il massimo assoluto, come notato prima) si ha perciò per $t = 0$, ed è $i_{massima} = i(0) = \ (\pi^2 \cdot 10^{-4})\ A$.

Relazione tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta:

Se il campo aumenta, aumenta il flusso quindi, per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale aumento: il suo verso è tale da produrre un campo magnetico che ha verso opposto a quello del campo che l’ha generata. Se il campo diminuisce, diminuisce il flusso quindi, sempre per la legge di Lenz, il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale diminuzione: il suo verso è tale da produrre un campo magnetico che ha lo stesso verso del campo magnetico che l’ha generata.

Con la collaborazione di Angela Santamaria