SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

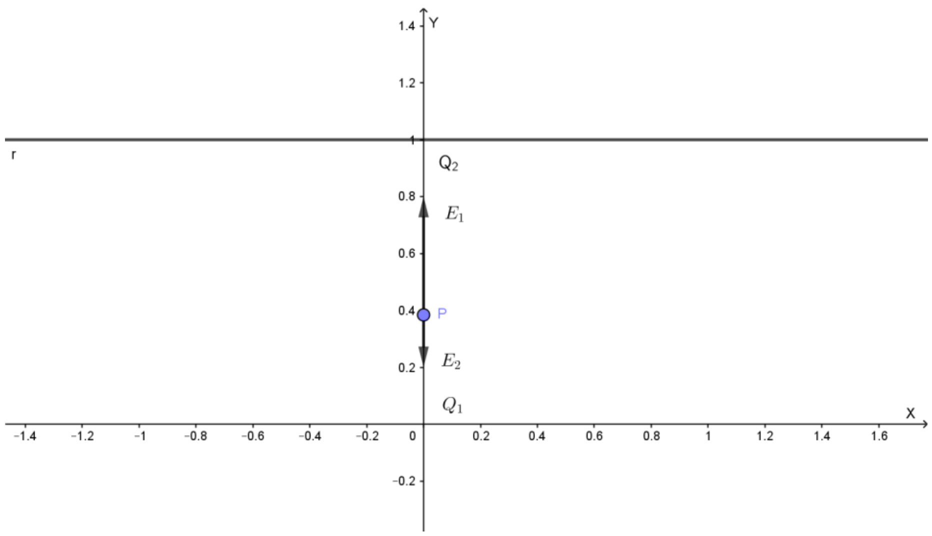
Tema di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ *(con q positivo) è fissata nell'origine* O *di un sistema di riferimento nel piano* Oxy *(dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme* $Q_2 = q$ *è vincolata a rimanere sulla retta* r *di equazione* $y = 1$.

1)

Supponendo che la carica Q_2 *sia collocata nel punto* $A(0,1)$, *provare che esiste un unico punto* P *del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche* Q_1 *e* Q_2 *è nullo. Individuare la posizione del punto* P *e discutere se una terza carica collocata in* P *si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.*

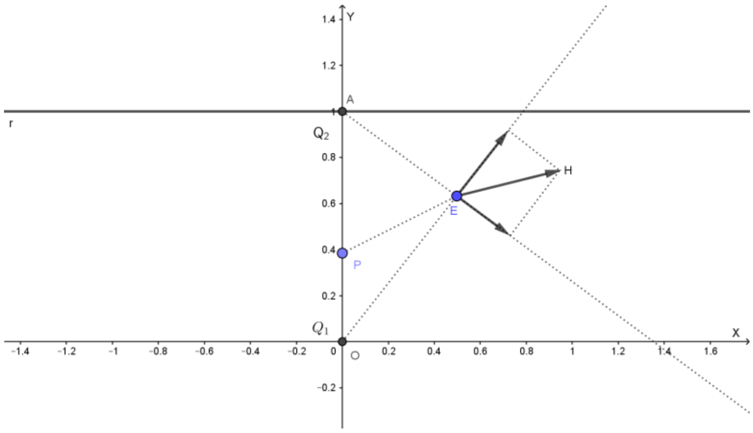


Osservando il verso dei campi generati dalle due cariche, il punto P deve trovarsi sull'asse y fra O ed A; detta y la sua ordinata deve essere:

$$E_1(P) = E_2(P), \quad \frac{kQ_1}{y^2} = \frac{kQ_2}{(1-y)^2}, \quad \frac{k4q}{y^2} = \frac{kq}{(1-y)^2}, \qquad 4(1-y^2) = y^2,$$

$$3y^2 - 8y + 4 = 0: \quad y = 2\ (non\ accettabile)\ e \quad y = \frac{2}{3}\ , unica\ soluzione\ accettabile\ .$$

Collochiamo ora in P una terza carica Q_3 (supponiamo positiva). Tale carica è in equilibrio elettrostatico **instabile.** Infatti se spostiamo la carica da P verso un punto E, la risultante delle forze esercitate da Q_1 *e* Q_2 tende ad allontanare la carica da P come si può vedere nella figura seguente:

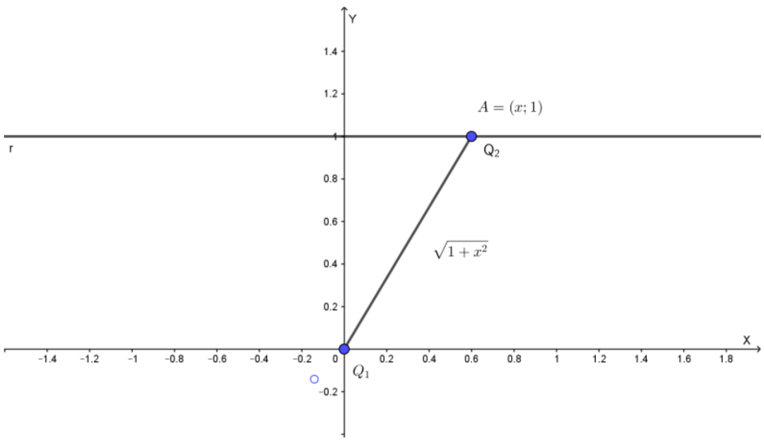


2)

Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da

$$U(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove k è una costante positiva (unità di misura: $N \cdot m^2/C^2$).



Risulta:

$$U(x) = \frac{kQ_1Q_2}{OA} = \frac{k4q^2}{OA} = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = U(x)$$

3)

Studiare la funzione $U(x)$ per $x \in R$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

$$\boldsymbol{U(x) = 4kq^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Osserviamo che la funzione, a meno della costante moltiplicativa positiva $4kq^2$, è

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Si tratta di una funzione definita, continua e derivabile su tutto R, sempre positiva, pari (simmetria rispetto all'asse delle ordinate); i limiti all'infinito sono uguali a 0^+ (y=0 asintoto orizzontale).

Studiamo la derivata prima:

$y' = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \;\; se\; x \leq 0; massimo\ relativo\ (ed\ assoluto)\ per\ x = 0$; U(max)= $4kq^2$

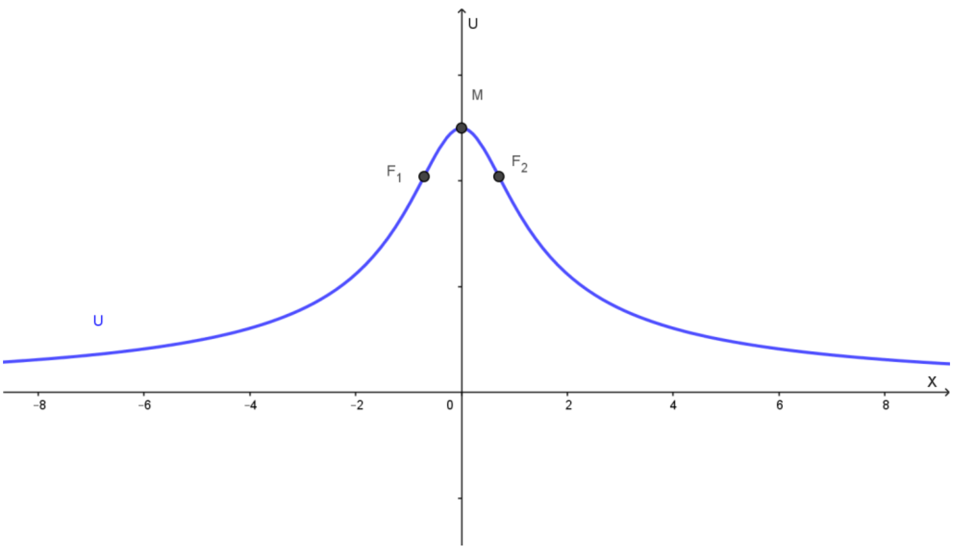
Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{3x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1+2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \;\; se\;\; x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\;,\;\; or\;\; x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Abbiamo quindi due flessi per la U(x):

$$F_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\, \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right),\;\; F_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\, \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Il grafico di U(x) è del tipo:



Il coefficiente angolare della tangente in F_2 è $U'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cdots = -\frac{8}{9}kq^2\sqrt{3}$; il coefficiente angolare della tangente in F_1 è $U'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cdots = \frac{8}{9}kq^2\sqrt{3}$;

4)

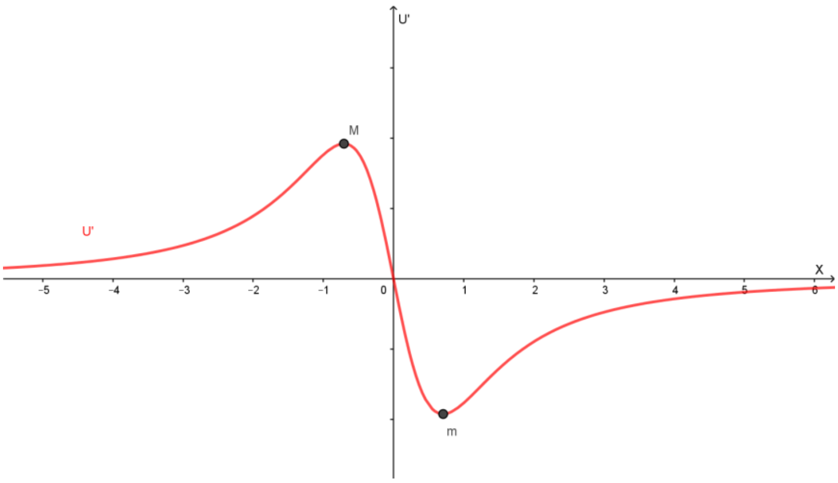
A partire dal grafico della funzione U, tracciare il grafico della funzione U', specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} U'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di U').

Dal grafico di U(x) deduciamo le seguenti proprietà di U'(x):

U è sempre derivabile, quindi U' è definita su tutto R.
Essendo U pari, U' sarà dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).
U cresce per x<0 (U' positiva) e decresce per x>0 (U' negativa); U'=0 per x=0.
U''>0 per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, *or* $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$: U' crescente; U''<0 per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: U' decrescente.
Quindi $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di massimo e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di minimo.

Osservando l'andamento della tangente al grafico di U(x) deduciamo che per $x \to +\infty$ il coefficiente angolare tende a 0^- (tale è anche il limite della U'); per $x \to -\infty$ il coefficiente angolare tende a 0^+ (tale è anche il limite della U').

Grafico qualitativo di U'(x):



Risulta:

$\int_{-m}^{m} U'(x)\,dx$=0, poiché $U'(x)$ è dispari.

Con la collaborazione di Angela Santamaria