SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA – 28 FEBBRAIO 2019

Tema di MATEMATICA-FISICA

Q 1

Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g: R - \{3\} \to R$

$$g(x) = \{3 - a\,x^2 \quad per\ x \le 1 \quad \frac{b}{x-3} \quad per\ x > 1$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g *e* g'.

La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio escluso x=1 che va analizzato separatamente.

Per essere derivabile in x=1 deve essere necessariamente continua, quindi:

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a = g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x-3} = -\frac{1}{2}b$. Quindi:

$$3 - a = -\frac{1}{2}b\,, \qquad b = 2a - 6$$

Risulta poi:

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax & se\ \ x < 1 \\ -\dfrac{b}{(x-3)^2} & se\ \ x > 1 \end{cases}$$

$$g'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} (-2ax) = -2a\ ,\ \ g'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \left[-\frac{b}{(x-3)^2}\right] = -\frac{1}{4}b\,.\ Quindi:$$

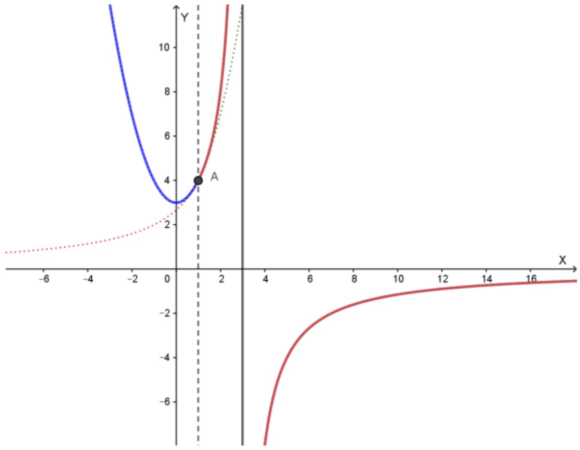
$-2a = -\frac{1}{4}b$, $b = 8a$. Deve pertanto essere:

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases};\quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

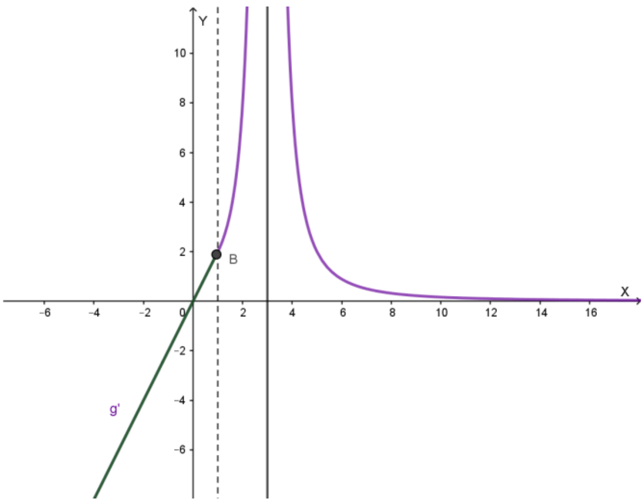
Perciò:

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & se\ \ x \le 1 \\ \dfrac{-8}{x-3} & se\ \ x > 1 \end{cases} \quad ; \quad g'(x) = \begin{cases} 2x & se\ \ x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & se\ \ x > 1 \end{cases}$$

Il grafico di g(x) è immediato, essendo una parte di parabola ed una parte di funzione omografica:



Il grafico di g'(x) è in parte una retta (per $x \leq 1$) ed in parte la funzione di equazione:
$y = \frac{8}{(x-3)^2}$, $se\ x > 1$.
Studiamo qualitativamente questa funzione:
E' sempre positiva, ha asintoto verticale x=3, per x che tende a più infinito tende a 0^+, si congiunge alla retta in B(1;2):



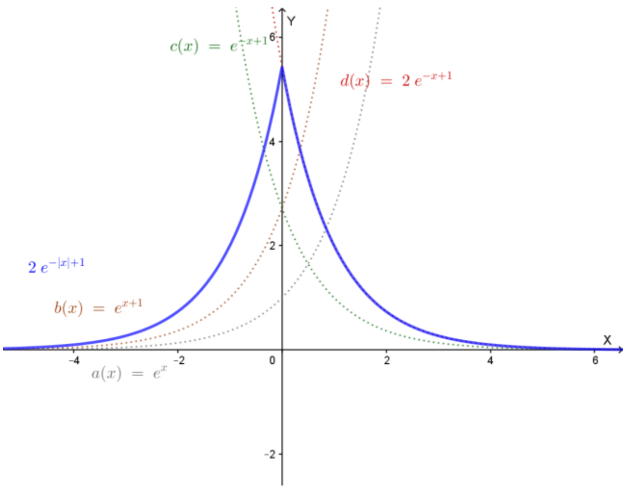
Q 2

Sia R la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. *Provare che, tra i rettangoli inscritti in R e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.*

Il grafico di $y = 2e^{1-|x|}$ si ottiene a partire dal grafico di $y = e^x$ mediante le seguenti trasformazioni:
$y = e^{1+x}$ $\quad traslazione\ di\ vettore\ (-1; 0)$
$y = e^{1-x}$ $\quad simmetria\ rispetto\ all'asse y$

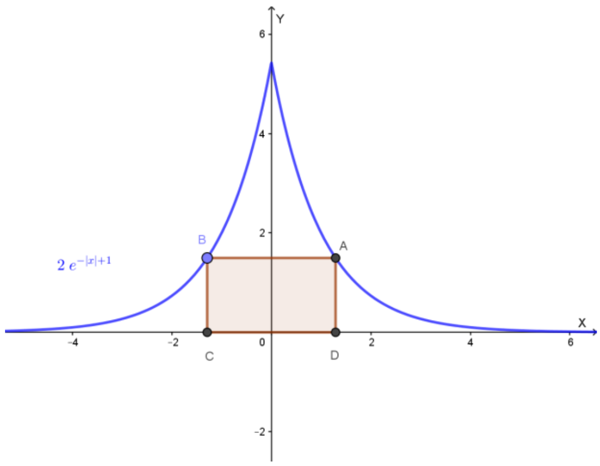
$y = 2\, e^{1-x}$ dilatazione verticale di fattore 2

$y = 2\, e^{1-|x|}$ si conferma la parte a destra dell'asse y della precedente funzione e si ribalta questa parte rispetto all'asse y:



Consideriamo il rettangolo ABCD e indichiamo con x l'ascissa di A (x>0); risulta:
$AD = y_A = 2\, e^{1-x}$, $AB = 2x$. Quindi:

$S = Area(R) = 2x(2\, e^{1-x}) = 4x\, e^{1-x}$, $x > 0$.
$S' = 4\, e^{1-x}(1-x) \geq 0$ se $x \leq 1$: S cresce se 0<x<1 e decresce se x>1 : S è massima se x=1.
Quindi: AB=2x=2 e AD=2 $e^{1-x} = 2$: il rettangolo di area massima è un quadrato.



Analizziamo ora il perimetro. Si ha:
$2p = 4x + 4\, e^{1-x} = min$ $se\ lo$ è $y = x + e^{1-x}$; $ma\ risulta$: $y' = 1 - e^{1-x} \geq 0$ se

$e^{1-x} \leq 1$, $1 - x \leq 0$, $x \geq 1$: il perimetro cresce per x>1 e decresce per 0<x<1: esso è minimo se x=1, quindi il rettangolo di perimetro minimo è un quadrato, lo stesso che ha area massima.

Q 3

Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.

- *Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?*
- *Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?*

a) La probabilità che il primo estratto sia 10 è $p_1 = \frac{1}{16}$, la probabilità che il secondo estratto sia minore di 10 è $p_2 = \frac{9}{16}$, uguale alla probabilità p_3 che sia minore di 10 anche il terzo estratto. Quindi la probabilità p richiesta è:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \cong 0.0198 = 1.98\ \%$$

b) Le cinquine favorevoli sono quelle che contengono il 13 e quattro fra i numeri da 1 a 12, quindi sono tante quante le combinazioni di 12 oggetti a 4 a 4 : $\binom{12}{4}$.

Le cinquine possibili sono tante quante le combinazioni di 16 oggetti a 5 a 5: $\binom{16}{5}$.
La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{495}{4368} \cong 0.113 = 11.3\ \%$$

Q 4

Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, *dove* $s(x)$ *e* $t(x)$ *sono polinomi, tale che il grafico della funzione:*

- *incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;*
- *abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;*
- *passi per il punto $P(7, 10)$.*

Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

La funzione richiesta ha equazione del tipo:

$$y = a \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$

Questa funzione infatti taglia l'asse x in -1 e 2 ed in quest'ultimo ha una radice doppia (quindi grafico tangente all'asse x). Inoltre i limiti per x che tende a -3 oppure ad 1 sono uguali ad infinito, perciò x=-3 e x=1 sono asintoti verticali.

Imponiamo il passaggio per il punto $P(7, 10)$:

$$10 = a \cdot \frac{(8)(25)}{(10)(6)} = \frac{10}{3}\, a\,, \quad a = 3$$

Quindi una funzione che soddisfa le condizioni richieste è:

$$y = 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$

Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

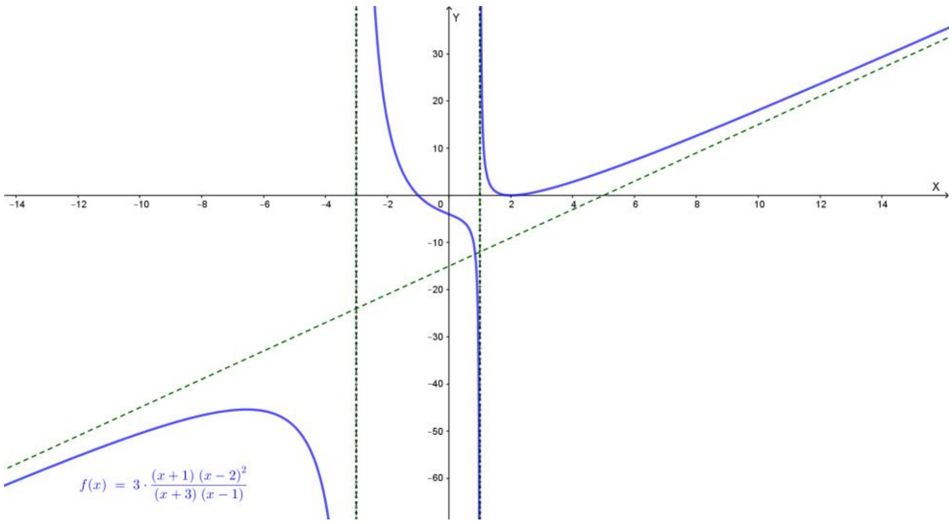
$$\lim_{x \to \mp\infty} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} 3 \cdot \frac{x^3}{x^2} = \mp\infty$$

(si avrà un asintoto obliquo poiché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore)

$$\lim_{x \to (-3)^{\mp}} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = 3 \lim_{x \to (-3)^{\mp}} \frac{(-2)(25)}{(x+3)(-4)} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to (1)^{\mp}} 3 \cdot \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} = 3 \lim_{x \to (-3)^{\mp}} \frac{(2)(1)}{(4)(x-1)} = \mp\infty$$

Il grafico qualitativo è quindi del tipo:



Q 5

Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.

- *Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano* π *di equazione* $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ *e la superficie S sono secanti.*
- *Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando* π *e S.*

Il centro ha coordinate $C = (1; 0; \ -3)$. Il raggio è:

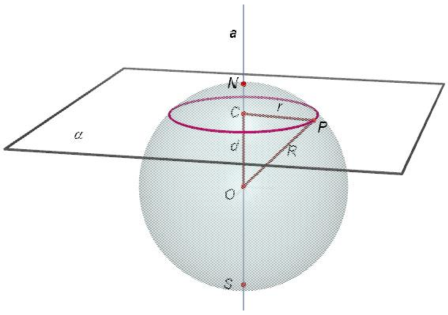
$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{10} = R$$

Il piano è secante se la distanza d del centro della sfera dal piano è minore del raggio:

$$d = \frac{|ax_C + by_C + z_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3 - 18 + 1|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 2 < \sqrt{10} \ : piano\ e\ sfera\ sono\ secanti.$$

Detto r il raggio della circonferenza sezione, R il raggio della sfera e d la distanza del centro della sfera dal piano si ha:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}: raggio\ circonferenza\ .$$



Q 6

Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, *da* $x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, *dove* $x(t)$ *indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante* t *(in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.*

Il moto non è uniformemente accelerato, perché la legge oraria dovrebbe essere del tipo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Calcoliamo la velocità media nei primi 9 secondi:

$$x(9) = 45, \qquad x(0) = 0, \qquad v_M = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45}{9}\frac{m}{s} = 5\ m/s$$

Cerchiamo la velocità in funzione di t:

$$v = x'(t) = \frac{2}{9}t\left(\frac{1}{3}t + 2\right) + \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}(t^2 + 4t) = 5, \quad t^2 + 4t - 45 = 0:$$

$t = -2 \pm 7;\ \ valore\ accettabile\ \ t = 5\ s\ .$

La velocità media dei primi 9 secondi si ha all'istante $t = 5\ s$.

Q 7

Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.

a. *Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.*
b. *Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.*

Indichiamo con $v'_A\ e\ v'_B$ le velocità della prima e della seconda pallina dopo l'urto; applicando il principio di conservazione della quantità di moto ed il principio di conservazione dell'energia cinetica (essendo l'urto elastico), abbiamo:

$$\begin{cases} mv = mv'_A + 3mv'_B \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v'_A)^2 + \frac{1}{2}(3m)(v'_B)^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v = v'_A + 3v'_B \\ v^2 = (v'_A)^2 + 3(v'_B)^2 \end{cases} ; (v'_A + 3v'_B)^2 = \ (v'_A)^2 + 3(v'_B)^2$$

$6v'_A v'_B + 6(v'_B)^2 = 0\ ,\ \ v'_B = 0\ \ oppure\ \ v'_B = -v'_A$

La prima soluzione non è accettabile, quindi:

$$\begin{cases} v'_B = -v'_A \\ v = v'_A + 3v'_B = v'_A - 3v'_A = -2v'_A \end{cases} ; \quad \begin{cases} v'_A = -\frac{1}{2}v \\ v'_B = \frac{1}{2}v \end{cases}$$

Analizziamo ora il caso dell'urto completamente anelastico (dopo l'urto avremmo un unico corpo di massa $4m$); in questo caso si conserva solo la quantità di moto. Indichiamo con v' la velocità dopo l'urto (comune ai due corpi):

$$mv = (m + 3m)v'\ ,\ \ v' = \frac{1}{4}v$$

Cerchiamo infine la perdita di energia (data dalla differenza fra l'energia cinetica iniziale e quella finale):

$$E_i - E_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(4m)(v')^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - 4v'^2) = \frac{1}{2}m\left(v^2 - \frac{1}{4}v^2\right) = \frac{3}{8}mv^2$$

Q 8

Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + sen(\omega t))$*, dove* t *indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato* l*. Detta* R *la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante* t*. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.*

$$fem = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\left(B_0\left(2 + sen(\omega t)\right) \cdot l^2\right)}{dt} = -B_0 l^2(\omega\, cos(\omega t) = -\omega l^2 B_0\, cos(\omega t)$$

Calcoliamo l'intensità della corrente indotta:

$$i = \frac{fem}{R} = \left(-\frac{\omega l^2 B_0}{R}\right) cos(\omega t)$$

Unità di misura delle grandezze coinvolte:

$B, B_0: tesla\ (T)$, $\omega: radianti\ al\ secondo, rad/s$, $t: secondi\ (s)$, $fem: volt\ (V)$,

$\Phi(\vec{B}): tesla\ per\ metri\ quadrati = weber\ (Wb)$, $i:\ ampere\ (A)$, $l: metri\ (m)$,

$R: ohm\ (\Omega)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria