NOTA DI BRUNO MALUSARDI

quesito 7 - maturità 2019 (sessione straordinaria)

Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$.
Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.
($m_\mathrm{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ massa del protone ; $m_\alpha = 6{,}645 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ massa particella α ;
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C carica elementare)

Il testo non dà indicazioni sulla particella α, se sia vincolata a stare ferma o se da ferma possa mettersi in moto.

1) ***ipotesi***: la particella α si mette in moto (rettilineo).
Le due particelle hanno carica elettrica dello stesso segno pertanto sono soggette a una forza repulsiva $\vec{F}$.
Poiché $\vec{a}_\mathrm{p} = \vec{F}/m_\mathrm{p}$ e $\vec{v}_0$ sono vettori antiparalleli, il modulo della velocità del protone diminuisce man mano che questo si avvicina alla particella α, che invece si è messa in movimento lungo la retta di moto del protone con velocità avente stessa direzione e stesso verso di quella del protone ma modulo in aumento (poiché quanto più il protone si avvicina tanto più aumenta l'intensità della forza elettrica repulsiva).
La velocita v_cm del centro di massa delle due particelle si mantiene costante giacché non esistono forze esterne agenti su di esse, perciò puo essere determinata nella situazione iniziale:

$$v_\mathrm{cm} = \frac{m_\mathrm{p} v_0 + m_\alpha \cdot 0}{m_\mathrm{p} + m_\alpha} = \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p} + m_\alpha} v_0$$

La distanza tra le due particelle è minima quando esse hanno la stessa velocità v (nel sistema di riferimento di una di esse in tale istante sono entrambe ferme) sicché in tale istante si ha $v = v_\mathrm{cm}$

applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica: $U_\mathrm{i} + K_\mathrm{i} = U_\mathrm{f} + K_\mathrm{f}$

$$\Longrightarrow \qquad 2k_0 \frac{e^2}{d} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2 = 2k_0 \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v^2$$

$$\Longrightarrow \qquad 2k_0 \frac{e^2}{r} = 2k_0 \frac{e^2}{d} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2 - \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 - \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$r = \frac{2k_0 e^2}{2k_0 \frac{e^2}{d} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2 - \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 - \frac{1}{2} m_\alpha v^2} = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{1}{4k_0 e^2}\left[m_\mathrm{p} {v_0}^2 - (m_\mathrm{p} + m_\alpha) v^2\right]}$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{1}{4k_0 e^2}\left[m_\mathrm{p} {v_0}^2 - (m_\mathrm{p})^2 \frac{{v_0}^2}{m_\mathrm{p} + m_\alpha}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{m_\mathrm{p} {v_0}^2}{4k_0 e^2}\left[1 - \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p} + m_\alpha}\right]}$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{{v_0}^2}{4k_0 e^2}\left[\frac{m_\mathrm{p} m_\alpha}{m_\mathrm{p} + m_\alpha}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{0{,}10\ \mathrm{m}} + \frac{(5{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2}{4(8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}\left[\frac{(1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(6{,}645 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} + 6{,}645 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}\right]}$$

$$= \frac{1}{10 + 36204907}\ \mathrm{m} = 2{,}762 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{r = 2{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = 28\ \mathrm{nm}}$$

la distanza iniziale è molto grande rispetto alle dimensioni delle due particelle, cosicché trascurando l'energia potenziale iniziale (come se inizialmente le due particelle fossero a distanza infinita) si ottiene praticamente lo stesso risultato (si noterebbe differenza solo con parecchie cifre significative).

2) ***ipotesi alternativa***: la particella α resta ferma.

Poiché $\vec{a}_\mathrm{p} = \vec{F}/m_\mathrm{p}$ e $\vec{v}_0$ sono vettori antiparalleli, il protone a un certo istante si ferma e immediatamente inverte il senso di marcia. In questo istante si ha dunque la minima distanza tra esse (cioè, come dice il testo, il massimo avvicinamento).

L'energia potenziale iniziale è $U_\mathrm{i} = k_0 \frac{Q_\mathrm{p} Q_\alpha}{d} = k_0 \frac{e \cdot 2e}{d} = 2k_0 \frac{e^2}{d}$

quella alla minima distanza r tra le due particelle è $U_\mathrm{f} = 2k_0 \frac{e^2}{r}$

applichiamo la legge di conservazione dell'energia meccanica: $U_\mathrm{i} + K_\mathrm{i} = U_\mathrm{f} + K_\mathrm{f}$

$$K_\mathrm{f} = 0 \quad \Longrightarrow \quad U_\mathrm{i} + K_\mathrm{i} = U_\mathrm{f} \quad \Longrightarrow \quad 2k_0 \frac{e^2}{d} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2 = 2k_0 \frac{e^2}{r}$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{2k_0 e^2}{2k_0 \frac{e^2}{d} + \frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2} = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{m_\mathrm{p} {v_0}^2}{4k_0 e^2}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}10\ \mathrm{m}} + \frac{(1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(5{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2}{4(8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{1}{(10 + 4{,}53 \cdot 10^7)\mathrm{m}^{-1}} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = 22\ \mathrm{nm}$$

la distanza iniziale è molto grande rispetto alle dimensioni delle due particelle, cosicché trascurando l'energia potenziale iniziale (come se inizialmente le due particelle fossero a distanza infinita) si ottiene lo stesso risultato.

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{p} {v_0}^2 = 2k_0 \frac{e^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{4k_0 e^2}{m_\mathrm{p} {v_0}^2} = \frac{4(8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})(5{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s})^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$$

N.B.

Probabilmente l'autore del quesito riteneva di operare con la prima ipotesi fatta, avendo inserito nei dati utili per la traccia anche la massa della particella alfa (che invece con la seconda ipotesi non è necessaria).

===