LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2019 - PROBLEMA 1

Dato $k > 0$, si consideri la funzione f: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx & se \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

a)

Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan\gamma = 3$?

Per $x \neq 1$ la funzione è continua; analizziamo $x = 1$.

$$f(1) = k\,, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(kx) = k\;, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{k}{x^2}\right) = k$$

Quindi la funzione è continua per ogni valore di k.

Analizziamo la derivabilità.
Anche in questo caso il punto da analizzare è $x = 1$, essendo la funzione derivabile per $x \neq 1$.
Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} k & se \;\; 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{-2k}{x^3} & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

E risulta:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}(k) = k\,, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-2k}{x^3}\right) = -2k$$

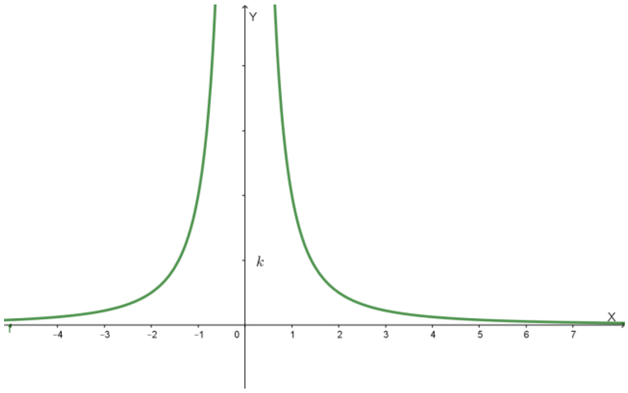
Quindi, essendo $k = -2k$ $per\ k = 0$, per $k > 0$ la funzione non è derivabile per x=1.

Studio della funzione

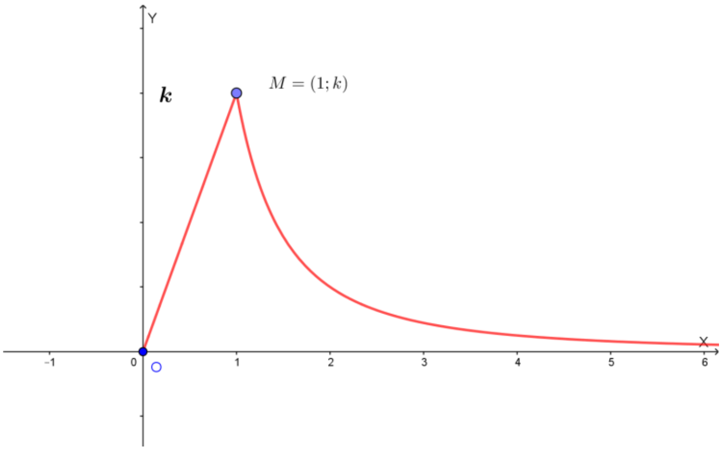
$$f(x) = \begin{cases} kx & se \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{k}{x^2} & se \;\; x > 1 \end{cases}$$

Per $0 \leq x \leq 1$ il grafico è un segmento di estremi $(0; 0)$, $(1; k)$, $con\ k > 0$

Per $x > 1$ il grafico è parte della funzione potenza $y = k\, x^{-2}$, che è del tipo:



Il grafico della funzione $y = f\ (x)$ è quindi il seguente:



Il punto di massimo assoluto è $M = (1; k)$.
Tale punto coincide con il punto di non derivabilità. In base a quanto visto precedentemente risulta:

$f'_{-}(1) = k \ \ e \ \ f'_{+}(1) = -2k$

Detto γ l'angolo fra le tangenti destra e sinistra in M si ha:

$$\tan\gamma = \left|\frac{m - m'}{1 + m\,m'}\right| = \left|\frac{k + 2k}{1 - 2k^2}\right| = \left|\frac{3k}{1 - 2k^2}\right| = 3 \quad se \quad \frac{3k}{1 - 2k^2} = \pm 3$$

$$\frac{3k}{1 - 2k^2} = 3\,, \ \ 3k = 3 - 6k^2\,, \qquad 2k^2 + k - 1 = 0,\ \ k = \frac{-1 \pm 3}{4}:\ accettabile\ k = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{3k}{1 - 2k^2} = -3, \qquad 3k = -3 + 6k^2,\ \ 2k^2 - k - 1 = 0:\ k = -\frac{1}{2}\ non\ acc.\ e\ k = 1\ accettabile$$

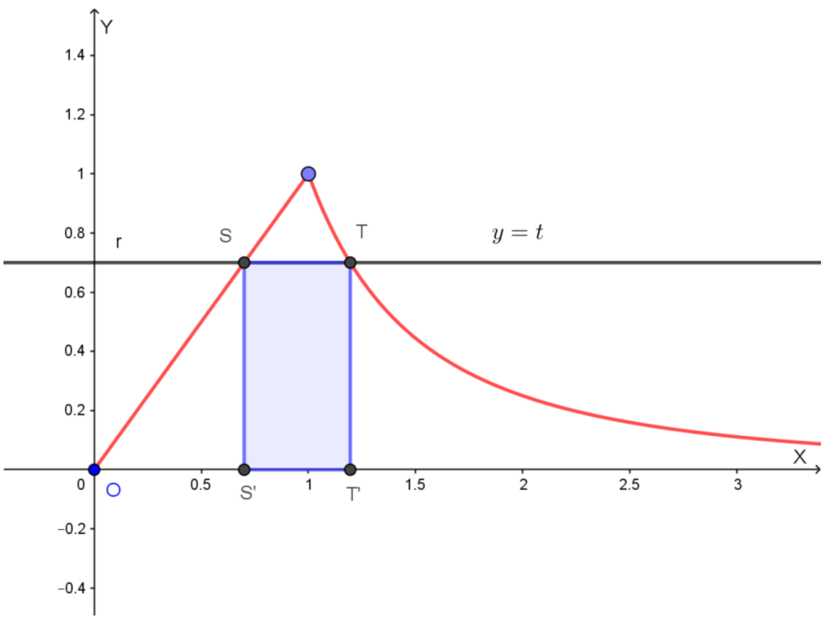
Pertanto le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $tan\,\gamma = \ 3$ se $k = \frac{1}{2} \quad o \quad k = 1.$

b)

Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r ed il grafico della funzione f, siano S' e T' le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x. Come deve essere scelto il valore di t, in modo che sia massima l'area del rettangolo $SS'T'T$?

Se $k = 1$ la funzione f ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} x & se \;\; 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & se \;\; x > 1 \end{cases}$$



Cerchiamo S e T.

S: $\begin{cases} y = x \\ y = t \end{cases}$; $\;\; S = (t; t)$

T: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = t \end{cases}$; $\;\; T = \left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}; t\right)$

$Area(SS'T'T) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} - t\right)(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t}} - t^2 = \sqrt{t} - t^2 \,, \;\; con \;\; 0 < t < 1$

Quindi dobbiamo cercare il massimo della funzione

$y = \sqrt{t} - t^2, \;\; con \;\; 0 < t < 1$

Risulta: $y' = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t \ge 0 \;\; se \; 1 \ge 4t\sqrt{t} \,, \; \frac{1}{16} \ge t^3 \colon \; t \le \sqrt[3]{\frac{1}{16}} , \; con \; 0 < t < 1$

Quindi la funzione è crescente per $0 < t < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ e decrescente per $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} < t < 1$, risulta quindi massima per $t = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

L'area del rettangolo $SS'T'T$ è massima per $t = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R, espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ρ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

c)

Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx & se \ \ 0 \leq x \leq R \\ \dfrac{kR^3}{x^2} & se \ \ x > R \end{cases}$$

dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ρ e la dimensione fisica.

Consideriamo una superficie sferica S di raggio x interna alla sfera che contiene le cariche e ad essa concentrica e applichiamo il teorema di Gauss. Detto Φ il flusso attraverso S del campo elettrico E generato dalle cariche interne ad S si ha:

$$\Phi = \mathrm{ES} = 4\pi \mathrm{x}^2 E$$

Per il teorema di Gauss, detta Q la carica totale contenuta in S ed ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto, si ha poi:

$$\Phi = \frac{\mathrm{Q}}{\epsilon_0}$$

Ma se V è il volume della sfera S risulta:

$$Q = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)$$

Quindi:

$$\Phi = \frac{\mathrm{Q}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi x^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

Uguagliando le due espressioni del flusso:

$$4\pi x^2 E = \frac{4\pi x^3 \rho}{3\epsilon_0}, \qquad da\ cui: \ E = \frac{\rho x}{3\epsilon_0}$$

Per i punti esterni alla distribuzione di cariche, con ragionamento analogo si ha:

$4\pi x^2 E = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$, tenendo presente che in questo caso $Q = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$

Quindi per i punti esterni:

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 x^2}$$

Osservato che nel centro della distribuzione di cariche il campo elettrico è nullo e che sulla sua superficie è dato da $E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$ (caso particolare del caso relativo ai punti interni quando x tende ad R), si ha:

$$E(x) = \begin{cases} kx & se \ \ 0 \le x \le R \\ \dfrac{kR^3}{x^2} & se \ \ x > R \end{cases}$$

avendo posto $k = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$.

Calcoliamo la dimensione fisica di k:

$$[k] = \frac{[\rho]}{[\epsilon_0]} = \frac{\left[\frac{Q}{V}\right]}{[\epsilon_0]} = \frac{\frac{[Q]}{[L^3]}}{\left[\frac{Q^2}{FL^2}\right]} = \frac{[F]}{[QL]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[ITL]} = [M][T]^{-3}[I]^{-1} = [k]$$

L'unità di misura di k è: $\frac{Kg}{s^3 A}$.

d)

Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

Il lavoro dL (positivo)compiuto dalla forza elettrica (del campo generato dalla distribuzione sferica di carica positiva) per spostare di un tratto x la carica q (positiva) dal centro della sfera è dato da:

$$dL = qEdx$$

Integrando:

$$q\int_0^{2R} E dx = q\int_0^R (kx)dx + q\int_R^{2R}\left(\frac{kR^3}{x^2}\right)dx = q\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^R + q\left[-\frac{kR^3}{x}\right]_R^{2R} =$$

$= \frac{1}{2}kqR^2 - q\left(\frac{1}{2}kR^2 - kR^2\right) = qkR^2$: lavoro per portare q dal centro della sfera a distanza 2R.

Calcoliamo ora il lavoro per portare la carica dal centro della sfera all'infinito:

$$L = q\int_0^R (kx)dx + q\int_R^{+\infty}\left(\frac{kR^3}{x^2}\right)dx = q\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^R + q\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{kR^3}{x}\right]_R^b =$$

$$= \frac{1}{2}qkR^2 - q\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{kR^3}{b} - kR^2\right) = \frac{1}{2}kqR^2 - 0 + kqR^2 = \frac{3}{2}kqR^2 = L$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri