LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2019 - PROBLEMA 2

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l, misurata in metri (m), di massa m, misurata in chilogrammi (Kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e costante, perpendicolare al filo (fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i, misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo θ con la direzione verticale (fig. 2).

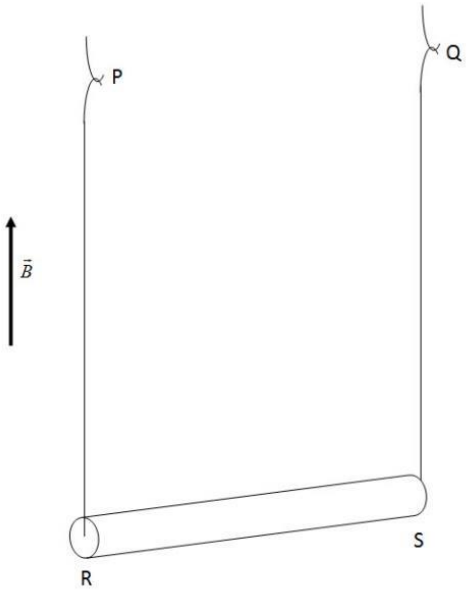


Fig. 1

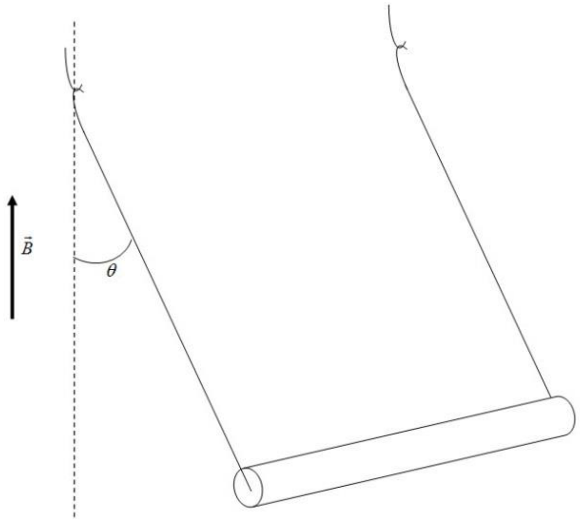


Fig. 2

a)

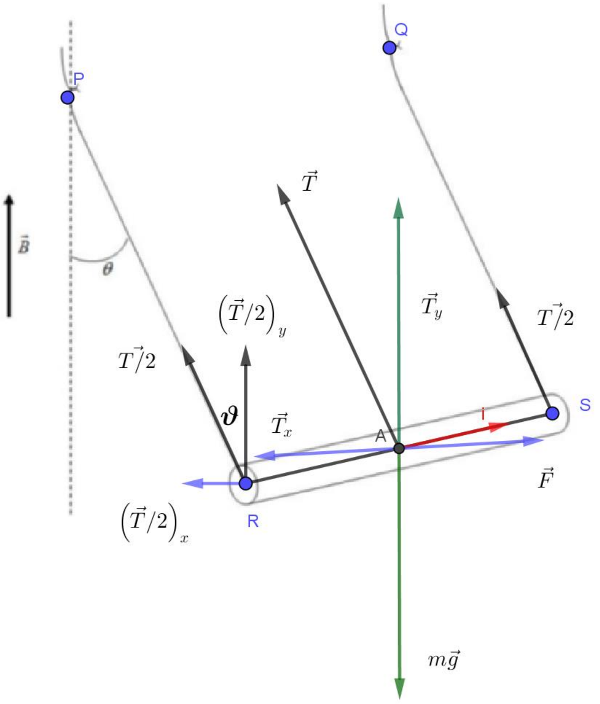
Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?

La forza $\vec{F}$ con cui il campo magnetico agisce sulla corrente è data da: $\vec{F} = i\vec{l}\wedge\vec{B}$ .Quindi la forza è perpendicolare al filo RS ed al vettore campo $\vec{B}$. Il verso della forza segue la regola della mano destra del prodotto vettoriale e dipende quindi dal verso della corrente che può circolare da R verso S (in tal caso il filo viene spostato verso destra come in Fig. 2) o da S verso R (in tal caso il filo viene spostato verso sinistra)

L'intensità della forza (essendo il campo perpendicolare al filo) è data da:

$$F = Bil$$

Quando il filo è in equilibrio, il peso del filo è equilibrato dalla componente verticale T_y della risultante T delle tensioni dei due fili PR e QS; la forza F è equilibrata dalla componente orizzontale della risultante delle tensioni.



Indicata con $\frac{T}{2}$ la tensione di ciascuno dei due fili risulta:

$$\left(\frac{T}{2}\right)_y = \frac{T}{2}\cos\theta \ , \ \left(\frac{T}{2}\right)_x = \frac{T}{2}\sin\theta \ , \ T_y = 2\left(\frac{T}{2}\right)_y \ \ e \ \ T_x = 2\left(\frac{T}{2}\right)_x$$

Quando il filo RS è in equilibrio deve essere: $T_x = F_x = F = Bil \ \ e \ \ T_y = mg, \ quindi$:

$$\begin{cases} T\sin\theta = Bil \\ T\cos\theta = mg \end{cases} ; \ \ dividendo\ membro\ a\ membro: \ \ tg\,\theta = \frac{Bil}{mg} \ \ , \ \ \theta = arctan\left(\frac{Bl}{mg}\cdot i\right)$$

Nella posizione di equilibrio si ha quindi:

$$\theta = arctan\left(\frac{Bl}{mg}\cdot i\right) = \theta(i)$$

All'aumentare dell'intensità della corrente aumenta quindi l'ampiezza dell'angolo d'inclinazione dei due fili di sospensione secondo questa legge.

b)

Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza *l* del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo θ in funzione dell'intensità di corrente i è data da $\theta(i) = arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$, in cui g è l'accelerazione di gravità.

Sul filo RS agiscono la forza peso di RS, le tensioni dei fili PR e QS e la forza $\vec{F}$ generata dal campo magnetico, come già evidenziato nel punto precedente. L'ampiezza dell'angolo θ dell'intensità di corrente i è data, come già dimostrato, da $\theta(i) = arctan\left(\frac{Bl}{mg} \cdot i\right)$.

c)

Posto $\theta(x) = arctan\,(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \theta(x)$ e la sua inversa $y = \theta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.

Posto $y = \theta(x) = arctan\,(kx) = f(x),\ dove\ \ k = \frac{Bl}{mg}$, la funzione inversa è data:
$\tan y = kx,\ \ x = \frac{\tan y}{k}$ e scambiando la x con la y otteniamo:

$$y = \theta^{-1}(x) = \frac{\tan x}{k} = g(x)$$

Ricordiamo che due curve di equazione y=f(x) e y=g(x) sono tangenti se

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Nel nostro caso, notato che entrambe le curve passano per l'origine, ricordiamo il legame fra la derivata di una funzione e della sua inversa:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Quindi $g' = f'\ \ se\ \ \ \frac{1}{f'(x)} = f'(x),\ \ \ [f'(x)]^2 = 1,\ \ f'(x) = \pm 1$

Calcoliamo le derivate di f:

$$f'(x) = D\big(arctan\,(kx)\big) = \frac{k}{1 + k^2x^2} = \pm 1$$

Essendo $k > 0$ può essere solo: $\frac{k}{1+k^2x^2} = 1$. Essendo $x = 0$ $si\ ha$ $k = 1$.

Indicati con m_2 ed m_1 i coefficienti angolari delle tangenti nell'origine ai grafici di f e g, uguali rispettivamente ad $f'(0)$ e $g'(0)$, deve essere:

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Risulta:

$$m_2 = f'(0) = k\,, \qquad m_1 = g'(0) = \frac{1}{k}$$

Deve quindi essere:

$$\left|\frac{k - \frac{1}{k}}{1+1}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}\ , \qquad \frac{k^2-1}{2k} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Primo caso:

$$\frac{k^2-1}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \dots\,, \qquad 3k^2 - 2\sqrt{3}\,k - 3 = 0\,, \qquad k = \sqrt{3}\ , \qquad k = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ non\ \text{è}\ accettabile.$$

Secondo caso:

$$\frac{k^2-1}{2k} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \dots\,, \qquad 3k^2 + 2\sqrt{3}\,k - 3 = 0\,, \qquad k = \frac{\sqrt{3}}{3}\ , \qquad k = -\sqrt{3}\ non\ \text{è}\ accettabile.$$

I valori richiesti di k sono quindi: $k = \sqrt{3}$ e $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d)

Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\theta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \theta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

Con $k = 1$ si ha: $y = \theta(x) = arctan\ (x) = f(x)$.

La generica primitiva di $\theta(x)$ è data da:

$F(x) = \int arctan\ (x)\ dx$. Integrando per parti si ha:

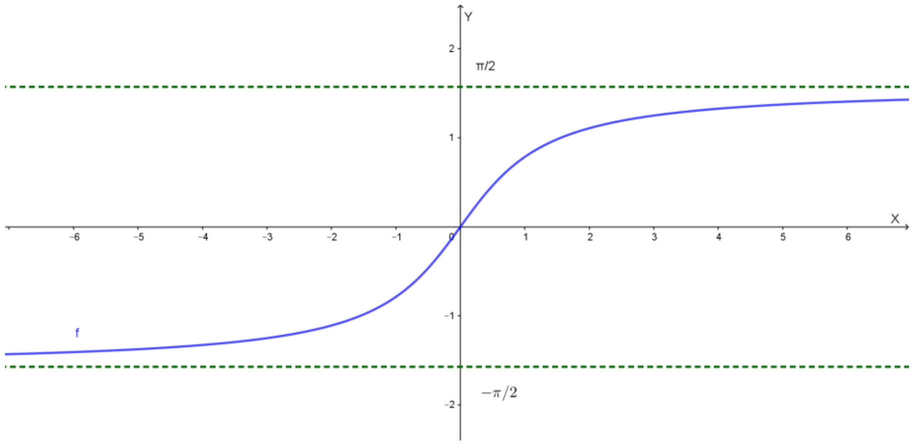
$$F(x) = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. Ed essendo $F(0) = 0$ si ha $C = 0$.

La primitiva richiesta è quindi:

$$F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$$

La funzione $y = \theta(x) = f(x)$ ha il seguente grafico:



Osserviamo che $f(x)$ è dispari, quindi $F(x)$ sarà pari $\left(F'(x) = f(x)\right)$. Risulta poi: $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0) = 0,\ F'(x) = f(x) > 0\ \ per\ x > 0,\ F'(x) < 0\ \ per\ x < 0$: F è quindi crescente per x>0 e decrescente per x<0; x=0 è punto di minimo relativo e assoluto.

Osserviamo che, essendo $F'(0) = f(0) = 0, x = 0$ è $un\ punto\ a\ tangente\ orizzontale.$

Risulta poi $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] = +\infty$ (osserviamo che, per $x \to \pm\infty,\ x\arctan(x)$ è asintotico a $\pm\frac{\pi}{2}\,x$, che è infinito di ordine superiore rispetto a $\ln(1+x^2)$).

Osserviamo infine che, essendo $F'(x) = f(x) = arctg(x)$, risulta $F''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ da cui si evince che $F''(x) > 0$ per ogni x, quindi il grafico di F volge sempre la concavità verso l'alto (non ci sono flessi).

Notiamo che, pur essendo $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \frac{\pi}{2} = m$, **F(x) non ammette asintoto obliquo** per $x \to +\infty$. Infatti, ricordando la proprietà $arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, si ha:

$arctgx = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ e $\ln(1+x^2) \sim 2\ln x$ per $x \to +\infty$. Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right) - \ln x - \frac{\pi}{2}x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[-1 - \ln x] = -\infty$$

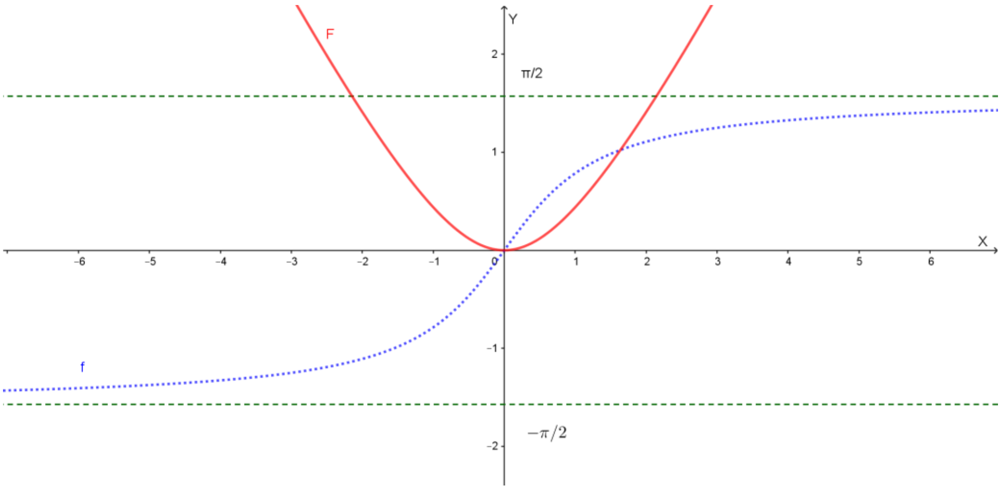
Essendo F pari non ci sarà asintoto obliquo neanche per $x \to -\infty$.

N.B. Dimostriamo che $arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Posto $arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha$ $si\ ha$: $\frac{1}{x} = tg\alpha$, $x = \frac{1}{tg\alpha} = cotg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow arctgx = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e

quindi: $arctgx = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ da cui, infine, $arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ c.v.d.

Il grafico di $y = F(x)$ è quindi del tipo:



Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri