LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2019 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Determinare il valore di questo limite: $\lim_{x\to 0}(1-\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

Ricordiamo i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{x\to P}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e\ \ quando\ f(x)\to 0\ \ se\ x\to P,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{-1}{\sin x}}\right]^{-\frac{sinx}{x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

QUESITO 2

Data la funzione $f(x)=x\operatorname{sen} x$ e fissato un numero $k>0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k\cdot f(kx)\,dx$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0)=0$) non dipende dalla scelta di k.

Si ha: $f(kx)=0\ \ se\ \ kx\ sen(kx)=0$: $k=0\ \ e\ x=0\ non\ accettabili$;

$kx=h\pi,\qquad x=\dfrac{h\pi}{k}$: $minimo\ x_0=\dfrac{\pi}{k}\ (con\ h=1)$.

(ricordiamo che $x_0>0$).

Cerchiamo una primitiva di $k\,f(kx)=k^2x\ sen(kx)$, integrando per prati:

$$\int k^2x\ sen(kx)\mathrm{dx}=k^2\int x\ sen(kx)\mathrm{dx}=k^2[x\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)-\int-\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx]=$$

$$=\ -kx\cos(kx)+k^2\left[\frac{1}{k^2}\ sen\ (kx)\right]+C=-\ kx\cos(kx)+sen\ (kx)+C$$

Quindi:

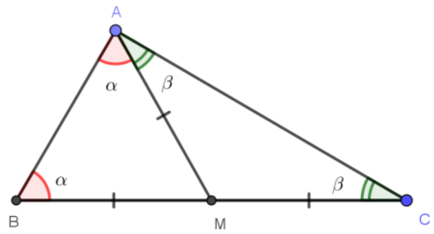
$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} k^2x\ sen(kx)\ \mathrm{dx}=[-kx\cos(kx)+sen\ (kx)]_0^{\frac{\pi}{k}}=-\pi(-1)+0-(0)=\pi:\ indipendente\ da\ k$$

QUESITO 3

Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC. Dimostrare che, se la lunghezza di AM è la metà di BC, allora ABC è un triangolo rettangolo.

Prima soluzione.

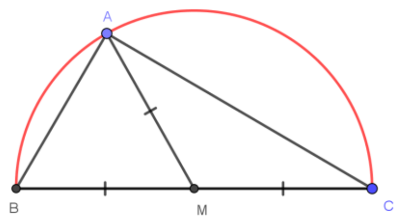
Il triangolo AMB è isoscele sulla base AB, quindi gli angoli MAB ed MBA sono congruenti (chiamiamoli α). Il triangolo AMC è isoscele sulla base AC, quindi gli angoli MAC ed MCA sono congruenti (chiamiamoli β).



Risulta $2\alpha + 2\beta = \pi, \ \ quindi\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$: il triangolo ABC è quindi rettangolo in A.

Seconda soluzione.

I vertici A, B, C sono equidistanti dal punto M, quindi appartengono alla circonferenza di diametro BC e centro M. Essendo il triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.



QUESITO 4

Dopo aver verificato che il punto $T(1,0,1)$ appartiene al piano π: $x - 2y + 2z = 3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1,0,5)$ e tangente in T al piano π.

Sostituendo le coordinate di T nell'equazione del piano si ha: $1 - 0 + 2 = 3$: $verificato$.
Il centro C della sfera appartiene alla normale n al piano in T. I parametri direttori di n sono quelli del piano:

$$(1, -2, 2)$$

Le equazioni parametriche di n sono:

$$\begin{cases} x = 1 + (1)t \\ y = 0 + (-2)t \\ z = 1 + (2)t \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Il centro C ha quindi coordinate del tipo: $C = (1 + t;\ -2t; 1 + 2t)$.
Deve risultare: $CP = CT,\ quindi\ CT^2 = CP^2$:

$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = t^2 + 4t^2 + (2t - 4)^2$, $\quad 0 = -16t + 16$, $\quad t = 1$

Quindi: $C = (2;\ -2; 3)$. Detto R il raggio della sfera si ha: $R^2 = CT^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. La sfera ha quindi equazione:

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$.

QUESITO 5

Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

Supponiamo che nel mazzo ci siano 20 carte rosse e venti nere (non si dice di che tipo di carte si tratti!).

a) Le 6 carte devono essere tutte nere. Il numero dei casi favorevoli è dato dalle combinazioni di 20 oggetti a 6 a 6: $C_{20,6} = \binom{20}{6} = 38760$. Il numero dei casi possibili è dato dalle combinazioni di 40 oggetti a 6 a 6: $C_{40,6} = \binom{40}{6} = 3838380$. La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{C_{20,6}}{C_{40,6}} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}} = \frac{38760}{3838380} \cong 0{,}010 = 1.0\ \%$$

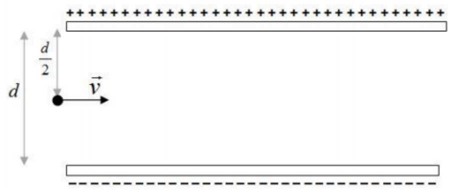
b)

Le coppie di assi sono $C_{4,2} = 6$; le quaterne senza assi sono $C_{36,4} = 58905$. I casi favorevoli sono quindi: $C_{4,2} \cdot C_{36,4} = 6 \cdot 58905 = 353430$. La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{C_{4,2} \cdot C_{36,4}}{C_{40,6}} = \frac{353430}{3838380} = \cong 0{,}0921 = 9.2\ \%$$

QUESITO 6

Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 4.0cm$, distanti $d = 3.0cm$, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15V$. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2.5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia $20cm$?

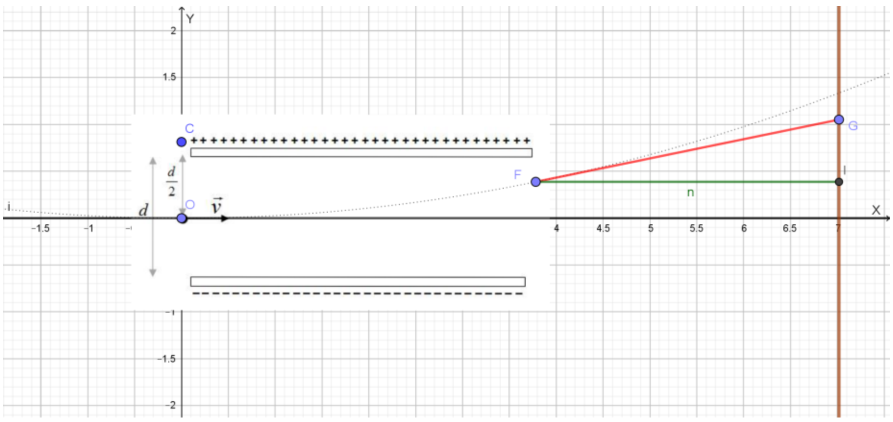


Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto di ingresso della particella, asse x nella direzione e nel verso della velocità di ingresso e asse y diretto verso l'alto. L'elettrone, per effetto del campo elettrico (diretto dall'armatura positiva a quella negativa) è soggetto alla forza elettrica $F = eE$, diretta verso l'armatura positiva (in verso opposto a quello del campo elettrico). Il moto risultante è un moto parabolico fra le armature, e rettilineo uniforme, lungo la tangente alla parabola nel punto di uscita dal campo, esternamente al campo. Tenendo presente che $E=\frac{\Delta V}{d}$, l'accelerazione dell'elettrone (detta m la sua massa) si ottiene nel modo seguente: $F=ma,\ a=\frac{F}{m}=\frac{eE}{m}=\frac{e\Delta V}{md}$. Le equazioni del moto dell'elettrone sono:

$$\begin{cases} x=v_0t \\ y=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{e\Delta V}{md}t^2 \end{cases} ;\ y=\frac{1}{2}\frac{e\Delta V}{md}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

Ponendo $x=l$ nell'equazione della parabola otteniamo l'ordinata del punto di uscita F:

$$y_F=\frac{1}{2}\frac{e\Delta V}{md}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2=\frac{0.5(1.602\cdot 10^{-19}\cdot 15)(0.040)^2}{9.109\cdot 10^{-31}\cdot(0.030)\cdot(6.25)(10^{12})}\cong 0.011\ m$$



La tangente alla parabola in F ha coefficiente angolare $y'(x_F)$. Ma risulta: $y'=\frac{e\Delta V}{mdv_0^2}x$, quindi:

$$y'(x_F)=\frac{e\Delta V}{mdv_0^2}l$$

Siccome $y'(x_F)=tg(\alpha)$, essendo α l'angolo formato dalla tangente FG con l'orizzontale n, si avrà:

$$GI=FI\ tg(\alpha),\ \ FI=\frac{GI}{tg(\alpha)}=\frac{GI}{\frac{e\Delta V}{mdv_0^2}l}=\frac{GI}{e\Delta Vl}mdv_0^2=$$

$$=\frac{0.20-y_F}{1.602\cdot 10^{-19}\cdot 15\cdot 0.04}(9.109\cdot 10^{-31})(0.03)(6.25)(10^{12})\ =\frac{0.20-0.011}{9.612\cdot 10^{-20}}\cdot 1.71\cdot 10^{-19}=$$

$$=0.336\ m$$

La distanza dello schermo dall'ingresso del condensatore è data da:

$$l+FI=(0.04+0.336)\ m=0.376\ m\cong 38\ cm$$

QUESITO 7

Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5{,}00 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.

Per il Principio di conservazione dell'energia meccanica si ha:

$K_A + U_A = K_C + U_C$, essendo A il punto di lancio del protone, B la posizione della particella alfa ($AB = \ 0.1\ m$) e C la posizione che può raggiungere il protone prima di fermarsi (CB=R distanza di massimo avvicinamento). Quindi:

$\frac{1}{2}\ m_P v_0^2 + k\frac{q_A \cdot q_B}{AB} = 0 + k\frac{q_A \cdot q_B}{CB^2}$, $\frac{1}{2}\ m_P v_0^2 + k\frac{2e^2}{0.1} = 0 + k\frac{2e^2}{R}$ (k costante di Coulomb).

$$\frac{1}{2}\ m_P v_0^2 + k\frac{2e^2}{0.1} = k\frac{2e^2}{R}\ ,\quad \frac{1}{R} = \frac{m_P v_0^2}{4ke^2} + \frac{1}{0.1} = \left(\frac{(1.673 \cdot 10^{-27})(5.00 \cdot 10^3)^2}{4 \cdot 8.988 \cdot 10^9 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19})^2} + 10\right) m^{-1} \cong$$

$$\cong (45330224.618544653 + 10)\ m^{-1} \cong 45330235\ m^{-1} : \quad R = (45330235)^{-1}\ m = 2.21 \cdot 10^{-8}\ m$$

La distanza di massimo avvicinamento del protone alla particella alfa è quindi $2.21 \cdot 10^{-8}\ m$.

QUESITO 8

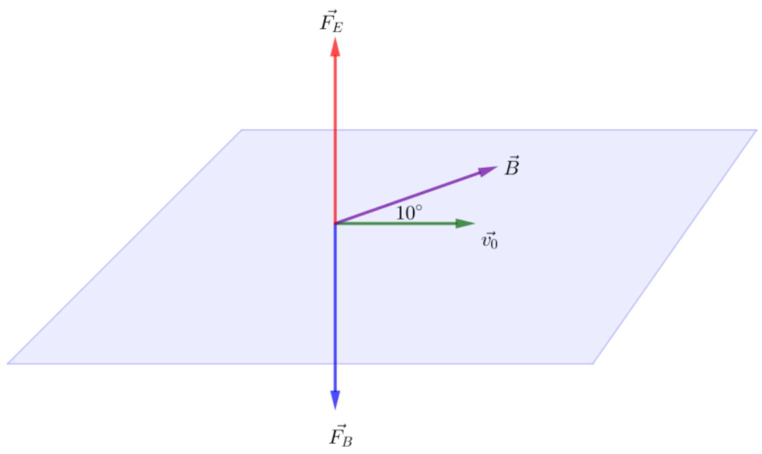
Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0.20T$, con velocità di modulo $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$, che forma un angolo di 10° con la direzione di $\vec{B}$. Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

L'elettrone è soggetto alla forza di Lorentz $\overrightarrow{F_B}$ perpendicolare al piano del vettore velocità e del vettore campo magnetico, diretta verso il basso, data da: $\overrightarrow{F_B} = -e(\vec{v}_0 \wedge \vec{B})$. Tale forza ha modulo:
$F_B = ev_0 B\ sen(10°)$.

Affinché l'elettrone non subisca deflessione il campo elettrico deve essere perpendicolare al piano della velocità e del campo magnetico, essere diretto verso il basso ed avere modulo eE , uguale al modulo della forza generata dal campo magnetico; in tal modo il campo elettrico genera una forza $\overrightarrow{F_E}$ uguale ed opposta ad $\overrightarrow{F_B}$.

Non si ha deflessione se il modulo E del campo elettrico soddisfa la seguente relazione:

$eE = ev_0 B\ sen(10°)$, $E = v_0 B\ sen(10°) = (1.5 \cdot 10^4)(0.20)(\sin(10°)) \cong 521\ \frac{V}{m} = E$



Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri