LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2019 - PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + x\, e^{a-x}) & per\ x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & per\ x < 0 \end{cases}$$

a)

Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.

Studiamo il segno della funzione al variare del parametro a.

Per $x \geq 0\ \ si\ ha\ \ f(x) = \frac{9}{2}(1 + x\, e^{a-x}) > 0\ \ per\ ogni\ x$.

Per $x < 0\ \ si\ ha\ \ f(x) = \frac{9a}{4(x-1)^4}$. Essendo il denominatore sempre positivo, in questo caso si ha

$f(x) > 0\ \ se\ a > 0\ \ ed\ f(x) < 0\ \ se\ \ a < 0$.

Quindi:

Se $a > 0$: $f(x) > 0\quad per\ ogni\ x$.
Se $a < 0$: $f(x) > 0\quad per\ x \leq 0\ \ ed\ \ f(x) < 0\quad per\ x < 0$.
Se $a = 0$: $f(x) > 0\quad per\ \ x \geq 0\ \ ed\ \ f(x) = 0\quad per\ x < 0$.

Studiamo la continuità della funzione al variare del parametro a.

La funzione è chiaramente continua per $x \neq 0$, per ogni valore di a . Analizziamo la continuità in $x = 0$.

$$f(0) = \frac{9}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{2}(1 + x\, e^{a-x})$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9a}{4}$$

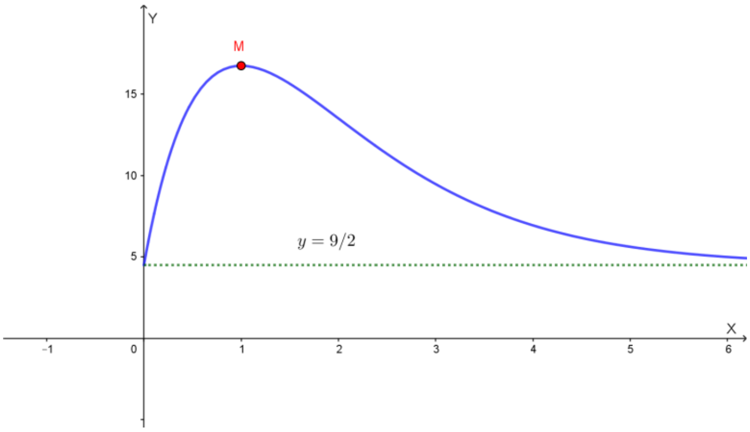
Quindi la funzione è continua anche in $x = 0$ se $\frac{9a}{4} = \frac{9}{2}$: $a = 2$.

Dimostriamo che la funzione ammette un punto di massimo assoluto in $x = 1$ per ogni a.

Se $x \geq 0$, essendo $1 + x\, e^{a-x} \geq 1$, si ha: $f(x) \geq \frac{9}{2}$.
Per $x \to +\infty \quad f(x) \to \frac{9}{2}$
Risulta poi:

$$f'(x) = \frac{9}{2}[e^{a-x} + x\, e^{a-x}(-1)] = \frac{9}{2}e^{a-x}(1-x) \geq 0 \ \ se \ \ x \leq 1.$$

La funzione è quindi crescente per $0 \leq x < 1$ e decrescente per $x > 1$: $x = 1$ è punto di massimo relativo, e anche assoluto $per\ x \geq 0$, con ordinata $f(1) = \frac{9}{2}(1 + e^{a-1}) > \frac{9}{2}$
Quindi per $x \geq 0$ il grafico della funzione è del tipo:



Se $x < 0$

$$f(x) = \frac{9a}{4(x-1)^4}$$

Per $x \to -\infty \quad f(x) \to 0^+ \ \ se \ \ a > 0 \ \ ed \ \ f(x) \to 0^- \ \ se \ \ a < 0$

Per $x \to 0^- \quad f(x) \to \frac{9}{4}a$.

(Osserviamo che se $a = 0$ per $x < 0$ $risulta$ $f(x) = 0$: quindi in tal caso è dimostrato che x=1 è punto di massimo assoluto).

Studiamo la monotonia della funzione per $x < 0$:

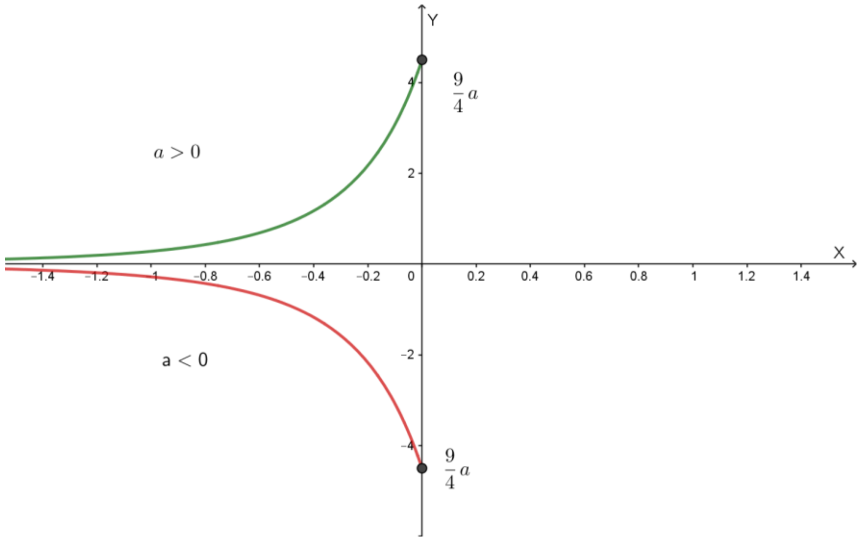
$$f(x) = \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9}{4}a(x-1)^{-4}, \quad f'(x) = -9a(x-1)^{-5} = -\frac{9a}{(x-1)^5}$$

Ed essendo il denominatore negativo risulta:

$f' > 0 \ \ se \ \ a > 0 \ \ ed \ \ f' < 0 \ \ se\ a < 0$. Pertanto:

se $a > 0$ la funzione è sempre crescente, se $a < 0$ la funzione è sempre decrescente.

Il grafico della funzione per $x < 0$ è del tipo:

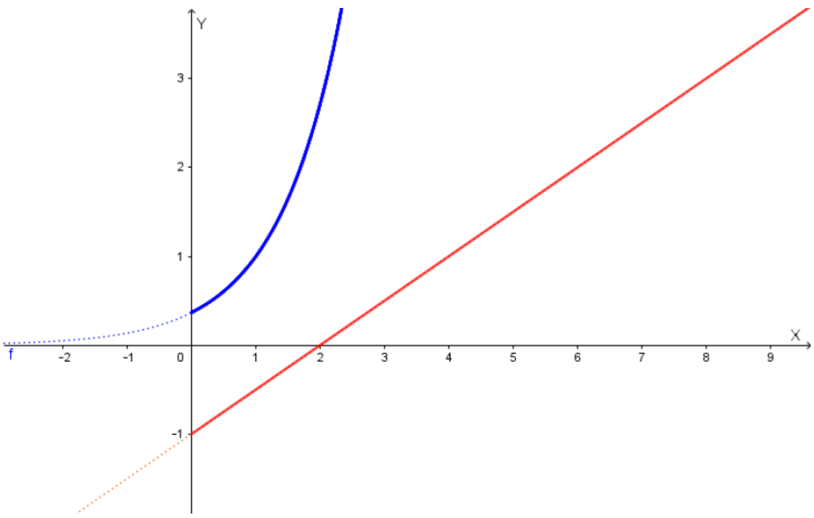


Chiaramente se $a < 0$, $x = 1$ è punto di massimo assoluto. Se $a > 0$ dobbiamo confrontare

$f(1) = \frac{9}{2}(1 + e^{a-1})$ con $\frac{9}{4}a$.

$$\frac{9}{2}(1 + e^{a-1}) > \frac{9}{4}a \quad se \quad e^{a-1} > \frac{1}{2}a - 1$$

Confrontiamo graficamente le funzioni $y_1 = e^{a-1}$ ed $y_2 = \frac{1}{2}a - 1$, che sono facilmente rappresentabili (la prima, blu, si ottiene da $y = e^a$ con una traslazione verso destra di 1 e la seconda, in rosso, è una retta):



Si osserva chiaramente che è sempre $y_1 > y_2$: quindi anche per $a > 0$ $x = 1$ è punto di massimo assoluto.

b)

Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

Se $a = 2$ la funzione f ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + x\,e^{2-x}) & per\ x \geq 0 \\ \dfrac{9}{2(x-1)^4} & per\ x < 0 \end{cases}$$

Utilizzando i calcoli già fatti con a generico nel punto a), abbiamo che:

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{9}{2}e^{2-x}(1 - x)$; $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{9}{2}e^2 = f'_+(0)$

Per $x < 0$: $f'(x) = -\frac{18}{(x-1)^5}$; $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 18 = f'_-(0)$

Quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove c'è un punto angoloso.

Studiamo l'andamento della funzione.

Sfruttando quanto già fatto con a generico possiamo dire che:

$f(x) > 0\ \ per\ ogni\ x\ e\ risulta\ f(0) = \dfrac{9}{2}$, $\quad massimo\ assoluto\ in\ M = \left(1; \dfrac{9}{2}(1 + e\right)$

Il grafico della funzione ha $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e $y = \frac{9}{2}$ come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

La funzione è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$.

Cerchiamo i flessi.

Per $x < 0$: $f'(x) = -\frac{18}{(x-1)^5} = -18(x - 1)^{-5}$; $\quad f''(x) = \frac{90}{(x-1)^6} > 0\ \ sempre\ se\ x < 0$:

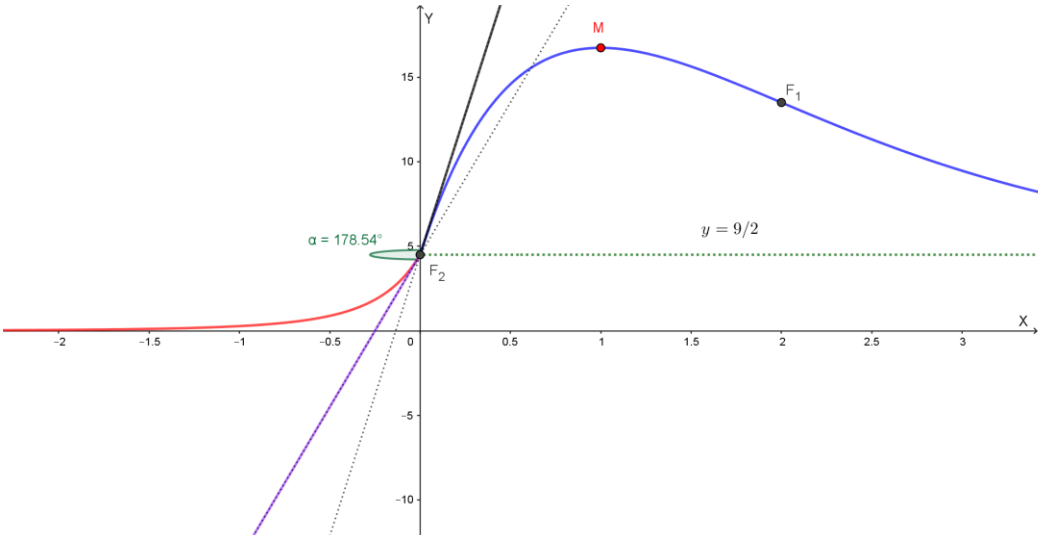
per $x < 0$ concavità sempre verso l'alto, nessun flesso.

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{9}{2}e^{2-x}(1 - x)$; $\quad f''(x) = \cdots = \frac{9}{2}\,e^{2-x}(x - 2) \geq 0\ \ se\ x \geq 2$:

per $x > 0$ abbiamo: concavità verso il basso se $x < 2$ e verso l'alto se $x > 2$; flesso per $x = 2$: $F_1 = \left(2; \frac{27}{2}\right)$.

Osserviamo che in x=0, pur essendoci un cambio di concavità, non c'è un punto di flesso perché la funzione non presenta una (unica) tangente. Ricordiamo che un punto di flesso è un punto in cui la curva attraversa **la** tangente.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Calcoliamo l'angolo formato dalle due semitangenti nel punto angoloso, dopo aver notato che si tratta di un **angolo ottuso;** il coefficiente angolare della semitangente sinistra è $m_1 = 18 = f'_-(0)$ e quello della semitangente destra è $m_2 = \frac{9}{2}e^2 = f'_+(0) > m_1$.

Detto α l'angolo ottuso fra le due semitangenti si ha:

$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{18 - \frac{9}{2}e^2}{1 + \left(\frac{9}{2}e^2\right)(18)} \cong -0.0254\,,$$

$$\alpha = tg^{-1}(-0.0254) = 180° - tg^{-1}(0.02544) = 178.54°\,.$$

Determiniamo ora i valori delle costanti positive *h* e *k* tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

$$g(3-x) = h\left[1 + \left(3 - k(3-x)\right)e^{k(3-x)-1}\right] = \frac{9}{2}\left(1 + x\,e^{2-x}\right)\ se:$$

$$\begin{cases} h = \frac{9}{2} \\ k = 1\ \ (dovendo\ essere\ \ k(3-x) - 1 = 2 - x) \end{cases}$$

I valori richiesti sono quindi: $h = \frac{9}{2}\ e\ \ k = 1$.

c)

Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a $42\ MeV$. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità $0{,}24\ T$. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.

Per la legge di Lorentz il fascio di protoni si muove su una traiettoria circolare nel piano passante per il punto P in cui i protoni entrano nel campo magnetico e perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

Dalla relazione:

$$qvB = ma = \frac{mv^2}{R}, \quad si\ ottiene\ il\ raggio\ di\ curvatura:\ R = \frac{mv}{qB}$$

Conoscendo l'energia cinetica E_c del fascio di protoni, possiamo calcolare la velocità con cui un protone entra nel campo magnetico:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \ ,\ \ v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} \ ,\ \ R = \frac{m\left(\sqrt{\frac{2E_C}{m}}\right)}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_C}}{qB} = R$$

$$E_C = 42\ MeV = 42 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\ J = 6.728 \cdot 10^{-12} J$$

$$m = 1.673 \cdot 10^{-27} kg\ ,\quad q = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C\ ,\quad B = 0.24\ T$$

Quindi:

$$R = \frac{\sqrt{2mE_C}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \cdot (1.673 \cdot 10^{-27} kg)(6.728 \cdot 10^{-12} J)}}{(1.602 \cdot 10^{-19}\ C)(0.24\ T)} = 3.902\ \ m$$

Il raggio di curvatura della traiettoria di un protone all'interno del campo è di 3.902 metri.

d)

Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx. Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = \frac{9}{2}$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

La funzione $g(x)$ ha equazione:

$$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}] = \frac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}]$$

Da $y = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ otteniamo quindi:

$$-d\mathcal{E}(x) = g(x)\, dx.$$

Perciò l'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone è:

$$-\mathcal{E} = \int_0^3 g(x)\, dx = \int_0^3 \frac{9}{2}[1 + (3 - x)e^{x-1}]\, dx = \frac{9}{2}\int_0^3 dx + \frac{9}{2}\int_0^3 (3 - x)e^{x-1} dx$$

Cerchiamo una primitiva di $(3 - x)e^{x-1}$ integrando per parti:

$$\int (3 - x)e^{x-1}\, dx = \int (3 - x)(e^{x-1})'\, dx = (3 - x)e^{x-1} - \int (-1)e^{x-1}\, dx =$$

$$= (3 - x)e^{x-1} + e^{x-1} + C$$

$$-\mathcal{E} = \frac{9}{2}\int_0^3 dx + \frac{9}{2}\int_0^3 (3 - x)e^{x-1} dx = \frac{9}{2}[x]_0^3 + \frac{9}{2}[(3 - x)e^{x-1} + e^{x-1}]_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} + \frac{9}{2}[e^2 - (3\, e^{-1} + e^{-1})] = \frac{27}{2} + \frac{9}{2}(e^2 - 4\, e^{-1}) \cong 40.129\ MeV$$

Quindi l'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone è $40.129\ MeV$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri