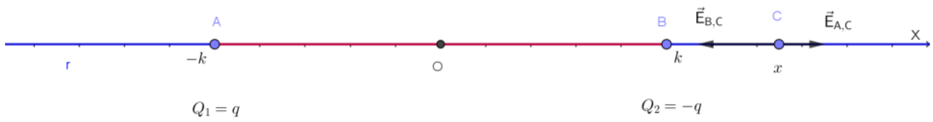
LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2019 - PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

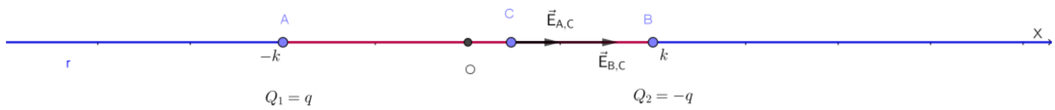
a)

Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.

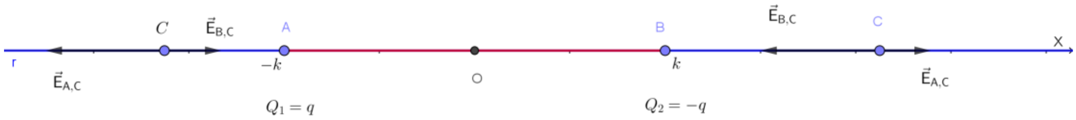


Fissiamo su r un sistema di riferimento con origine nel punto medio di AB e verso da A a B. Indichiamo con x l'ascissa del generico punto C di r. In C il campo generato dalla carica positiva posta in A è "uscente", cioè diretto nel verso della semiretta AC. Il campo generato dalla carica negativa posta in B è "entrante", cioè diretto nel verso della semiretta CB (in figura abbiamo immaginato C a destra di B).

Nei punti fra A e B il campo elettrico non può annullarsi (i campi generati dalle cariche poste in A e B sono diretti entrambi nel verso positivo dell'asse x).



Il campo potrebbe annullarsi solo esternamente al segmento AB, dove i campi generati dalle cariche poste in A e B hanno verso opposto. Ma, essendo le cariche uguali e opposte, a destra di B il campo generato dalla carica posta in B ha sempre intensità maggiore di quello generato dalla carica posta in A, essendo C più vicino a B; in modo analogo a sinistra di A ha modulo maggiore il campo generato dalla carica posta in A.



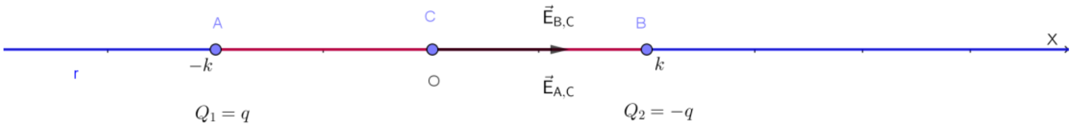
Se $C \equiv A \; oppure \; C \equiv B$ il campo ha intensità infinita.

In conclusione:

non esiste alcun punto della retta r in cui il campo elettrico è nullo.

Determiniamo ora l'espressione dell'intensità del campo elettrico in un generico punto C di r.

Se C è nel punto medio di AB il campo elettrico $\overrightarrow{E_C}$ generato in C dalle cariche poste in A e B ha verso positivo e intensità: $E_C = 2\left(K\frac{q}{k^2}\right), \; C \equiv O, \; K \; costante \; di \; Coulomb.$



Se C è compreso fra A ed O, il campo elettrico $\overrightarrow{E_C}$ generato in C dalle cariche poste in A e B è diretto verso destra ed ha intensità pari alla somma delle intensità dei campi generati dalle cariche poste in A e B:

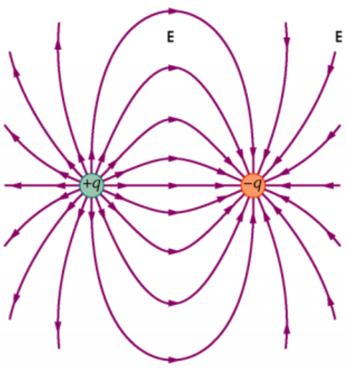
$$E_C = \left|K\frac{Q_A}{AC^2}\right| + \left|K\frac{Q_B}{BC^2}\right| = \left|K\frac{Q_A}{(x+k)^2}\right| + \left|K\frac{Q_B}{(k-x)^2}\right| = Kq\left(\frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(k-x)^2}\right) = E_C,$$

$con \; -k < x < k$ (tale espressione comprende anche il caso in cui $x = 0$)

Se C è a sinistra di A o a destra di B, il campo elettrico $\overrightarrow{E_C}$ generato in C dalle cariche poste in A e B è diretto verso sinistra ed ha intensità pari al modulo della differenza delle intensità dei campi generati dalle cariche poste in A e B (a sinistra di A è maggiore l'intensità del campo generato dalla carica posta in A, a destra di B il contrario). Quindi:

$$E_C = \left|\left|K\frac{Q_A}{AC^2}\right| - \left|K\frac{Q_B}{BC^2}\right|\right| = \left|\left|K\frac{Q_A}{(x+k)^2}\right| - \left|K\frac{Q_B}{(k-x)^2}\right|\right| = Kq\left|\frac{1}{(k-x)^2} - \frac{1}{(x+k)^2}\right| = E_C,$$

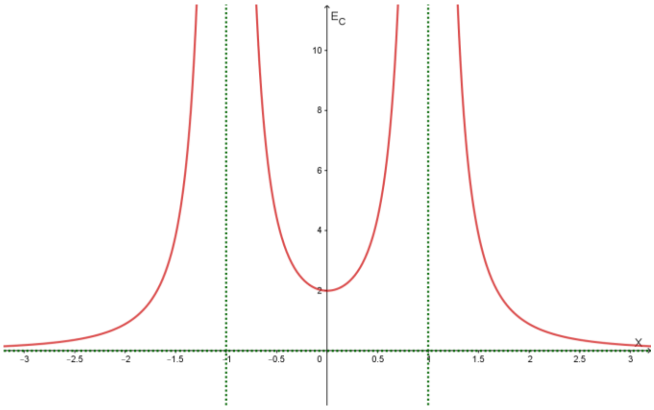
$con \quad x < -k \quad vel \quad x > k$



Si osservi che in nessun caso, osservando le espressioni trovate, l'intensità del campo in C può annullarsi, a conferma di quanto detto precedentemente.

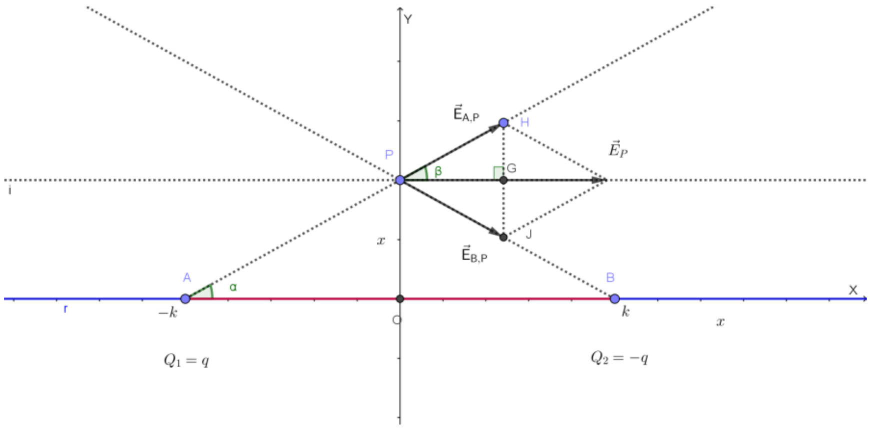
Nella figura a fianco sono rappresentate le linee di forza del campo elettrico generato da una coppia di cariche $+q$ e $-q$.

Ponendo per comodità grafica $Kq = 1 \quad e \quad k = 1$, l'andamento dell'intensità di E_C è il seguente:



b)

Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.



Notiamo che, essendo P equidistante da A e B ed essendo le cariche in A e B uguali in modulo, il campo totale in P è parallelo all'asse x, e l'angolo $H\hat{P}G = \beta$ è uguale all'angolo $P\hat{A}B = \alpha$. Inoltre, all'aumentare di x aumenta la distanza di P da A e da B, quindi diminuiscono le intensità dei campi generati dalle cariche poste in A e B e quindi anche l'intensità del campo totale in P.

Si ha poi:

$$E_P = 2PG = 2\,PH\cos\beta = 2\frac{Kq}{AP^2}\cos\alpha = 2\frac{Kq}{AP^2}\cdot\frac{k}{AP} = 2\frac{Kq}{(x^2+k^2)}\cdot\frac{k}{\sqrt{x^2+k^2}}$$

$$E_P = \frac{2Kqk}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}} = \frac{2Kqk}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = E_P$$

Osserviamo che tale espressione conferma che al crescere di x il campo in P decresce.

c)

Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

$$f(x)=\frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{h}{\sqrt{(x^2+k^2)^3}},\quad h>0 \quad e\; k>0$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

La funzione è definita e continua su tutto R, è sempre positiva, taglia l'asse y nel punto di ordinata $\frac{h}{k^3}$, è pari, essendo $f(-x)=f(x)$, risulta poi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0^+ : \quad y=0 \;\; asintoto\ orizzontale\;\; per\ x\to\pm\infty$$

Studiamo la derivata prima:

$$f(x)=h\,(x^2+k^2)^{-\frac{3}{2}}\;,\quad f'(x)=-\frac{3}{2}h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}(2x)=\frac{-3hx}{\sqrt{(x^2+k^2)^5}}\geq 0\quad se\;\; x\leq 0$$

La funzione è quindi crescente per $x<0$ e decrescente per $x>0$; $x=0$ è punto di massimo relativo (e assoluto) con ordinata $\frac{h}{k^3}$.

Studiamo la derivata seconda:

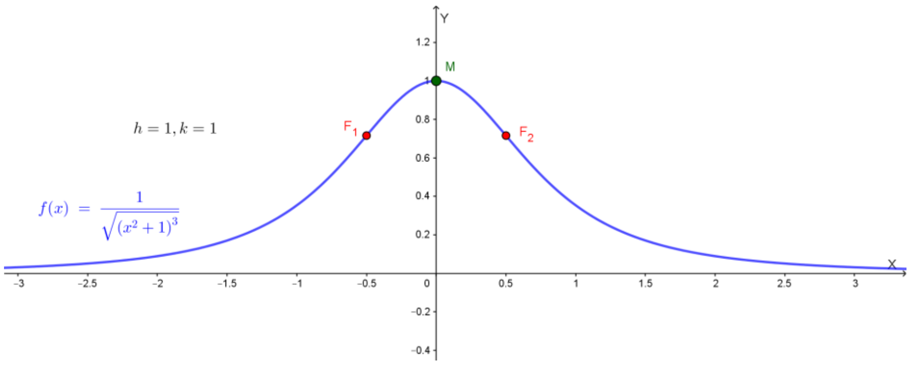
$$f'(x)=-3hx\,(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}}\;,\;\; f''(x)=\cdots=-3h(x^2+k^2)^{-\frac{7}{2}}(k^2-4x^2)\geq 0\;\; se\;\; k^2-4x^2\leq 0$$

$$x^2\geq\frac{k^2}{4}:\quad x\leq-\frac{k}{2}\;\; vel\;\; x\geq\frac{k}{2}.$$

Il grafico quindi volge la concavità verso l'alto per $x<-\frac{k}{2}\;\; vel\;\; x>\frac{k}{2}$ e verso il basso per $-\frac{k}{2}<x<\frac{k}{2}$.

Si hanno due flessi per $x=\pm\frac{k}{2}$; con ordinata $f\left(\pm\frac{k}{2}\right)=\cdots=\frac{8h}{5\,k^3\sqrt{5}}$.

Grafico ($con\ h=1\ e\ k=1$):



d)

Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2+k^2)^a}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

La funzione $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $g'(x) = f(x)$.

$g(x) = bx(x^2+k^2)^{-a}$,
$g'(x) = b(x^2+k^2)^{-a} - abx(x^2+k^2)^{-a-1}(2x) = b(x^2+k^2)^{-a-1}\left((x^2+k^2) - 2ax^2\right) =$
$= b(x^2+k^2)^{-a-1}(k^2 + (1-2a)x^2) = f(x) = h(x^2+k^2)^{-\frac{3}{2}}$ se:

$$\begin{cases} -a-1 = -\frac{3}{2} \\ 1-2a = 0 \\ bk^2 = h \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{h}{k^2} \end{cases}$$

Quindi $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{h}{k^2}$, perciò:

$$g(x) = \frac{hx}{k^2(x^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Poniamo ora $h = k^2$; $risulta$:

$$f(x) = \frac{h}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{(x^2+h)^{\frac{3}{2}}}$$

Questa funzione rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty)$ se $f(x) \geq 0$ in tale intervallo (ed è chiaramente verificato essendo $h \geq 0$) e:

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Verifichiamolo ricordando che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{h}{(x^2+h)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \lim_{z\to+\infty} [g(x)]_0^z = \lim_{z\to+\infty} [g(z) - g(0)] =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left(\frac{hz}{h(z^2+h)^{\frac{1}{2}}} - 0\right) = \lim_{z\to+\infty} \left(\frac{z}{(z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 1 \ , \ c.v.d.$$

La media della variabile aleatoria è data da:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{hx}{(x^2+h)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{h}{2}\int_0^{+\infty} 2x\,(x^2+h)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \frac{h}{2}\left[\frac{(x^2+h)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_0^z =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} -h\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}\right]_0^z = \lim_{z\to+\infty} -h\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+h}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right) = -h\left(0 - \frac{1}{\sqrt{h}}\right) = \frac{h}{\sqrt{h}} = \sqrt{h}$$

La media della variabile aleatoria è $M(X) = \sqrt{h}$.

La mediana della variabile aleatoria è data dal valore z tale che:

$\int_0^z f(x)\,dx = \int_z^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Quindi, ricordando che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$:

$$\int_0^z f(x)\,dx = [g(x)]_0^z = [g(z) - g(0)] = \frac{hz}{h(z^2+h)^{\frac{1}{2}}} - 0 = \frac{z}{(z^2+h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,,\ \ da\ \ cui\ (z>0):$$

$$2z = \sqrt{z^2+h}\,,\ \ 4z^2 = z^2+h\,, \qquad 3z^2 = h\ ,\ \ z = \sqrt{\frac{h}{3}}\ .$$

La mediana della variabile aleatoria è uguale a $\sqrt{\frac{h}{3}}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri