LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2019 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Fissati i numeri reali positivi a e b, con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \log_x(x^a + x^b) = a$$

Trasformando il logaritmo dalla base x alla base e, se $a > b$ l'infinto x^a è di ordine superiore rispetto all'infinito x^b, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_x(x^a + x^b) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x^a + x^b)}{ln\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x^a)}{ln\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\, ln\, x}{ln\, x} = a$$

Se $a = b$ risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \log_x(x^a + x^b) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x^a + x^b)}{ln\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(2x^a)}{ln\, x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2) + a\ln x}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a\, ln\, x}{ln\, x} = a$$

QUESITO 2

È assegnata la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

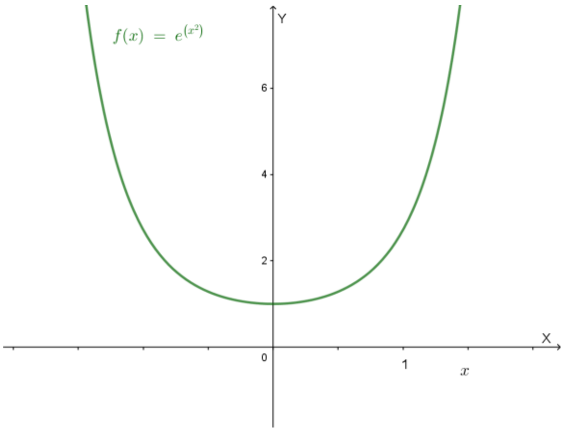
$$f(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)}\, dx$$

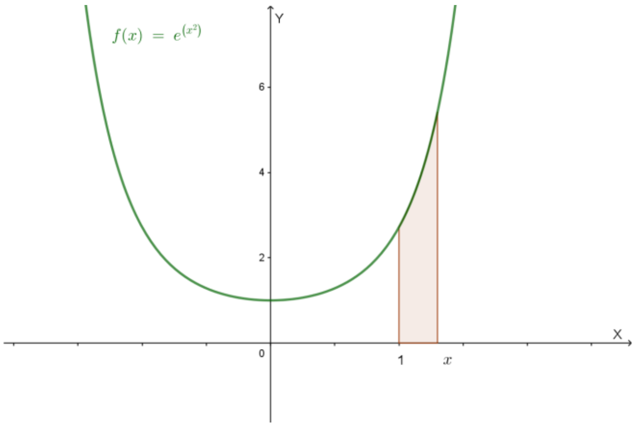
Osserviamo che la funzione $y = e^{x^2}$ è definita e continua su tutto l'asse reale ed è sempre positiva (anzi è $e^{x^2} \geq 1$).

Il grafico di $y = e^{x^2}$ è del tipo:

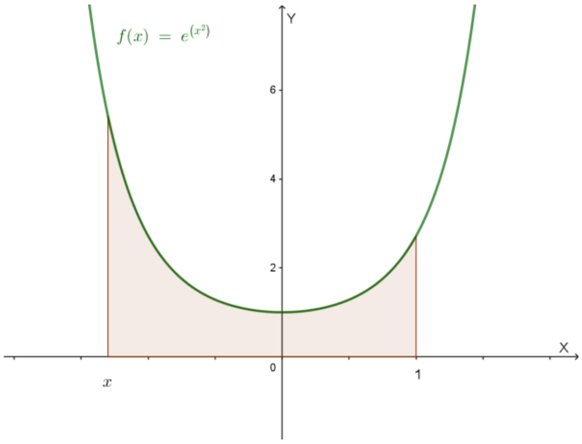


$Se\;\; x = 1, \qquad f(x) = \int_1^1 e^{t^2}\, dt = 0$

$Se\; x > 1\,, \qquad f(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt > 0$, come si può osservare graficamente ricordando il significato geometrico dell'integrale definito:



$Se\; x < 1\,, \qquad f(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt = -\int_x^1 e^{t^2}\, dt < 0, \qquad essendo\;\; \int_x^1 e^{t^2}\, dt > 0$

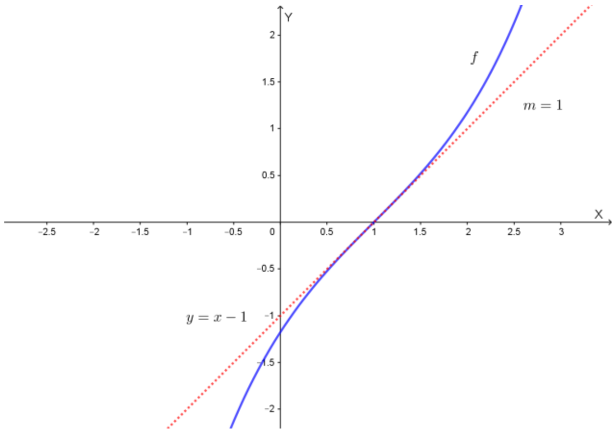


Quindi: $f(x) < 0\;\; se\; x < 1,\;\; f(x) = 0\;\; se\;\; x = 1,\;\; f(x) > 0\;\; se\;\; x > 1\,.$

Per il Teorema di Torricelli si ha: $f'(x) = e^{x^2} > 0 \ per\ ogni\ x :\ \ quindi\ f\ è\ crescente\ per\ ogni\ x.$

Che f sia sempre crescente lo si può anche dedurre graficamente osservando le figure precedenti. Infatti:
Se $x < 1$ l'integrale che definisce f rappresenta l'area cambiata di segno del corrispondente trapezoide; tale area va crescendo per $x \to -\infty$, quindi da $-\infty\ \ a\ \ 1$ l'area decresce, ma l'integrale, quindi f, cresce.
Se $x = 1$ $f(x) = 0$.
Se $x > 1$ l'area del trapezoide (quindi f) cresce.

Osserviamo che $f''(x) = D\left(e^{x^2}\right) = 2x\, e^{x^2}$. Tenendo presente il segno della funzione, la monotonia, e osservando che $f'(0) = 1\ \ ed\ \ f''(x) > 0\ per\ x > 0, f''(x) = 0\ \ per\ x = 0\ ed\ f''(x) < 0\ per\ x < 0$, possiamo tracciare il grafico di f:



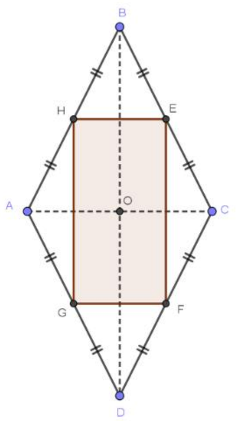
Calcoliamo infine l'integrale richiesto, dopo aver ricordato che:

$$f'(x) = e^{x^2}\ \ ed\ \ f''(x) = D\left(e^{x^2}\right) = 2x\, e^{x^2}:$$

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{2x\, e^{x^2}}{e^{x^2}}\, dx = \int_0^1 2x\, dx = [x^2]_0^1 = 1 .$$

QUESITO 3

Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.



Risulta: $HE \parallel AC\ \ e\ \ HE = \frac{1}{2}\, AC,$ per un noto teorema (il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed uguale alla sua metà).
Per lo stesso teorema si ha:

$$GF \parallel AC\ \ e\ \ GF = \frac{1}{2}\, AC$$

Quindi EFGH, avendo due lati opposti paralleli (perché entrambi paralleli ad AC) e congruenti (essendo entrambi congruenti alla metà di AC) è un parallelogramma. Quindi $EF \parallel HG$ ed inoltre $EF \parallel BD$ (analogamente a quanto detto prima).
Essendo EH ed HG paralleli a due segmenti perpendicolari (le diagonali del rombo) sono fra loro perpendicolari:

EFGH è quindi un rettangolo.

QUESITO 4

Considerati i punti $A(2,3,6)$, $B(6,2,-3)$, $C(3,-6,2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

Dobbiamo verificare che OA, OB e OC sono perpendicolari e congruenti.
Parametri direttori di OA: $2, 3, 6$.
Parametri direttori di OB: 6, 2, -3.
Parametri direttori di OC: 3, -6, 2.

$OA \perp OB$ se la somma dei prodotti delle componenti è nulla: $(2)(6)+(3)(2)+(6)(-3)=0$: *vero*.
$OA \perp OC$ se la somma dei prodotti delle componenti è nulla: $(2)(3)+(3)(-6)+(6)(2)=0$: *vero*.
$OB \perp OC$ se la somma dei prodotti delle componenti è nulla: $(6)(3)+(2)(-6)+(-3)(2)=0$: *vero*.

$OA=\sqrt{4+9+36}=7, \quad OB=\sqrt{36+4+9}=7, \qquad OC=\sqrt{9+36+4}=7$

Quindi OA, OB e OC sono spigoli di un cubo.

La sfera di equazione $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ è circoscritta al cubo di spigoli OA, OB e OC se passa pe O, A, B e C:

$$\begin{cases} d=0 \\ 4+9+36+2a+3b+6c=0 \\ 49+6a+2b-3c=0 \\ 49+3a-6b+2c=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} d=0 \\ 2a+3b+6c=-49 \\ 6a+2b-3c=-49 \\ 3a-6b+2c=-49 \end{cases}; \dots \begin{cases} a=-11 \\ b=1 \\ c=-5 \\ d=0 \end{cases}$$

La sfera circoscritta al cubo ha quindi equazione:

$x^2+y^2+z^2-11x+y-5z=0$

Il centro della sfera ha coordinate $\left(\frac{11}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$; il raggio è:

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d}=\sqrt{\frac{121}{4}+\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{147}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$$

QUESITO 5

Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

Sia X la variabile aleatoria: "massimo dei due numeri usciti nel lancio simultaneo di due dadi".
I valori che può assumere X sono: 1, 2, 3, 4, 5, 6,
Calcoliamo le probabilità che X assuma i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il massimo è 1 in 1 solo caso (1,1), quindi: $p(X = 1) = \frac{1}{36}$.
Il massimo è 2 in 3 casi: (1,2), (2,1), (2,2), quindi: $p(X = 2) = \frac{3}{36}$.
Il massimo è 3 in 5 casi (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (3,3), quindi: $p(X = 3) = \frac{5}{36}$.
Il massimo è 4 in 7 casi; 1, 2, 3 in uno dei due dadi e 4 in entrambi, quindi: $p(X = 4) = \frac{7}{36}$.
Il massimo è 5 in 9 casi; 1, 2, 3,4 in uno dei due dadi e 5 in entrambi, quindi: $p(X = 5) = \frac{9}{36}$.
Il massimo è 6 in 11 casi; 1, 2, 3, 4, 5 in uno dei due dadi e 6 in entrambi, quindi: $p(X = 6) = \frac{11}{36}$.

Il valore atteso, detto anche speranza matematica, è il valor medio della variabile X:

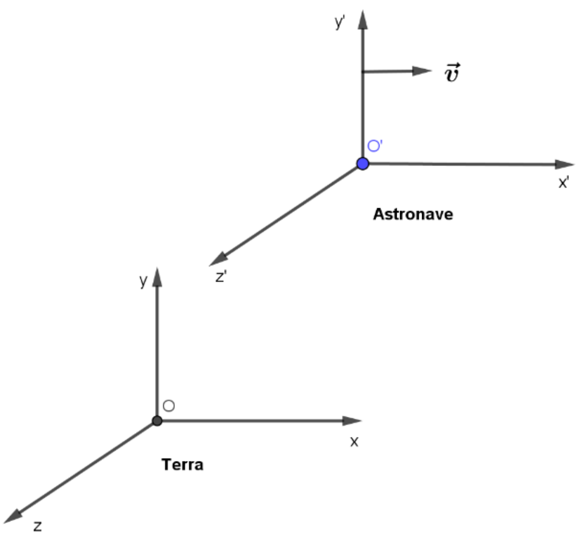
$$media(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6 =$$

$$= 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{161}{36} \cong 4.5\,.$$

Ripetendo la procedura la media attesa dei valori trascritti è circa 4.5.

QUESITO 6

Consideriamo un’astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v = 0.90\ c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40$ cm, $b = 50$ cm e $h = 20$ cm, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0.50\ c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l’osservatore sulla terra?



Indichiamo con $Oxyz$ il sistema di riferimento solidale con la Terra e con $O'x'y'z'$ quello solidale con l’astronave, supponendo che gli assi x e x', y e y', z e z' siano paralleli ed equiversi.
Supponiamo che il lato b sia parallelo agli assi x e x' e quindi il moto avvenga nel verso positivo degli assi x e x'.

Un osservatore solidale con la Terra osserva una contrazione delle lunghezze, nella direzione dell’asse x, di un fattore $\frac{1}{\gamma}$, dove:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19}}$$

per cui misurerà un volume della scatola pari a:

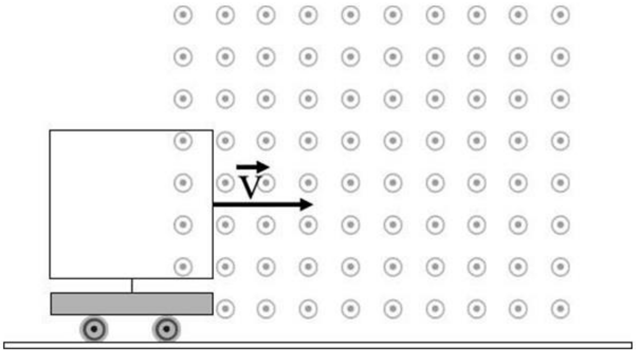
$$V = a\left(\frac{b}{\gamma}\right)h = 40 \cdot \left(50 \cdot \sqrt{0.19}\right) \cdot 20 \ \ cm^3 = 17436 \ cm^3$$

Se l'astronauta lancia la scatola a velocità v_S (rispetto all'astronave) nella direzione dell'asse x', l'osservatore sulla Terra, per le trasformazioni di Lorentz, osserverà una velocità pari a:

$$v_T = \frac{v + v_S}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot v_S} = \frac{0.90 + 0.50}{1 + 0.90 \cdot 0.50}\, c = \frac{1.4}{1.45}\, c \cong 0.966\, c$$

QUESITO 7

Una bobina è costituita da *N* spire quadrate di lato *l*, ha una resistenza elettrica *R* ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante v ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se in carrello viene lanciato con velocità v verso la stessa regione?



Nell'intervallo di tempo $\Delta t = \frac{l}{v}$ in cui la bobina attraversa il bordo della regione in cui è presente il campo magnetico vi è una variazione del flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie della bobina che, per la legge di Faraday- Neumann, induce nella bobina stessa una corrente indotta pari a

$$I_{ind} = \left|\frac{fem}{R}\right| = \frac{1}{R}\left|\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}\right| = \frac{NBl^2}{R \cdot \frac{l}{v}} = \frac{NBlv}{R}$$

e diretta in senso orario per la legge di Lenz.

La bobina, essendo attraversata da una corrente elettrica, si scalda per effetto Joule e la potenza dissipata è pari a

$$P_J = I_{ind}^2 \cdot R = \frac{N^2B^2l^2v^2}{R}$$

Se il carrello viene lanciato con velocità v nella stessa regione, si origina **solo sul lato destro** della bobina (per effetto della legge $\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$) una forza diretta verso sinistra.

Calcoliamo il valore di tale forza. La corrente indotta dipende dal tempo t e quando la spira ha percorso il tratto $x(t)$ nel campo magnetico è data da:

$$I_{ind} = \left|\frac{fem}{R}\right| = \frac{1}{R}\left|\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\right| = \frac{1}{R}\cdot\frac{NBldx(t)}{dt} = \frac{NBl}{R}\cdot v(t)$$

dove $v(t)$ è la velocità della spira all'istante t .

La forza $F_x(t)$ esercitata sul lato destro della bobina (di massa m) è:

$$F_x = -B(I_{ind})l = -B\left(\frac{NBl}{R}\cdot v(t)\right)l = -\frac{NB^2l^2}{R}\cdot v(t) = ma = m\frac{dv(t)}{dt}, \qquad da\ cui:$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{NB^2l^2}{m\,R}\cdot v(t), \quad \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{NB^2l^2}{m\,R}\cdot dt, \qquad da\ cui\ integrando\ (v\ velocità\ di\ ingresso)$$

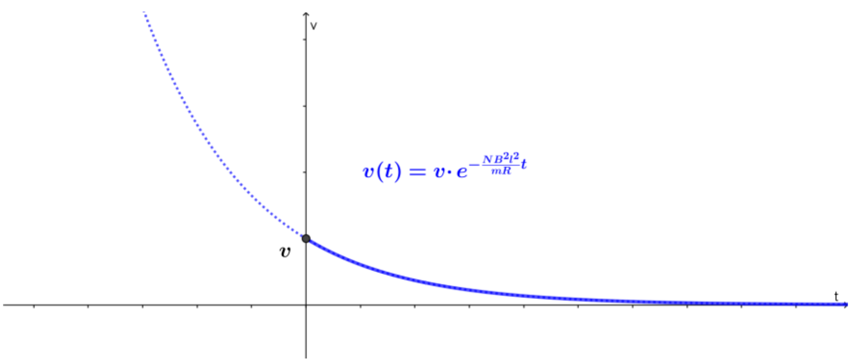
otteniamo la velocità con cui la spira si muove all'interno del campo magnetico:

$$\ln|v(t)| = \int -\frac{NB^2l^2}{m\,R}\cdot dt = \ -\frac{NB^2l^2}{m\,R}t + K, \qquad |v(t)| = e^{-\frac{NB^2l^2}{m\,R}t+K} = e^K\cdot e^{-\frac{NB^2l^2}{m\,R}t},$$

$$v(t) = \pm e^K\cdot e^{-\frac{NB^2l^2}{m\,R}t} = H\cdot e^{-\frac{NB^2l^2}{m\,R}t}; \quad ma\ per\ t = 0\ \text{ è }\ v(0) = v,\ \ quindi\ v = H, pertanto:$$

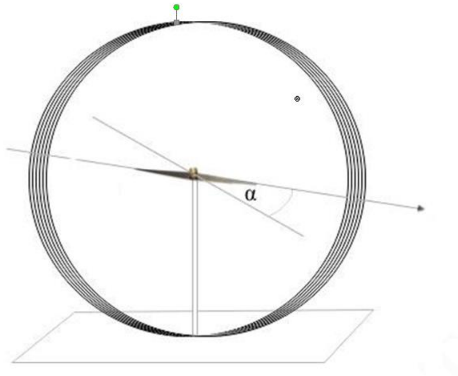
$$v(t) = v\cdot e^{-\frac{NB^2l^2}{m\,R}t}.$$

Il grafico è del tipo:



QUESITO 8

Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15\,\text{cm}$.
Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R, al centro della bobina, come in figura.

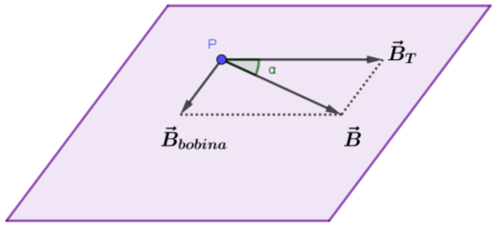


Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α. Spiegare la causa di questa deviazione.
In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

Quando la bobina è attraversata da corrente, supponiamo in verso antiorario, nel suo centro P si genera un campo magnetico ortogonale al piano della bobina e alla componente orizzontale $\overrightarrow{B_T}$ del campo magnetico terrestre, pari a $B_{bobina} = \frac{\mu_0}{2R} \cdot (Ni)$.
L'ago magnetico si orienta nella direzione del campo risultante $\vec{B} = \vec{B}_{bobina} + \overrightarrow{B_T}$ e quindi devia di un angolo α tale che:

$$tg\ \alpha = \frac{B_{bobina}}{B_T},\ \ da\ cui:\ B_T = \frac{B_{bobina}}{tg\alpha} = \frac{\mu_0 Ni}{2R\ tg\alpha}$$



Dalle misure sperimentali fornite abbiamo quindi:

Deviazione α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente (mA)	11.4	23.3	36.8	52.4	73.9
Intensità di corrente in A	$11.4 \cdot 10^{-3}$	$23.3 \cdot 10^{-3}$	$36.8 \cdot 10^{-3}$	$52.4 \cdot 10^{-3}$	$73.9 \cdot 10^{-3}$
$tg\ \alpha$	$tg\ 10°$	$tg\ 20°$	$tg\ 30°$	$tg\ 40°$	$tg\ 50°$
$B_T = \frac{\mu_0 N i}{2R\ tg\alpha}$ (in T)	$3.521 \cdot 10^{-5}$	$3.486 \cdot 10^{-5}$	$3.471 \cdot 10^{-5}$	$3.401 \cdot 10^{-5}$	$3.377 \cdot 10^{-5}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{N}{A^2}\right)$; $\quad numerospire = N = 130$; $\quad R = 15\ cm = 0.15\ m$

Il valor medio di B_T è : $3.451 \cdot 10^{-5}\ T$; la deviazione standard è: $0.060 \cdot 10^{-5}$ T .

Quindi, in base ai dati sperimentali, risulta:

$$B_T = (3.45 \pm 0.06) \cdot 10^{-5}\ T$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri