Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano cartesiano si considerino le curve di equazioni:

$$y = \frac{ax^2 + bx^3}{x^3 - 2x^2 + x}$$

essendo a, b parametri reali con $a > 0$ e $b < 0$.

a) Determinare la particolare curva γ che ha come estremo relativo il punto di coordinate (-2; -4).

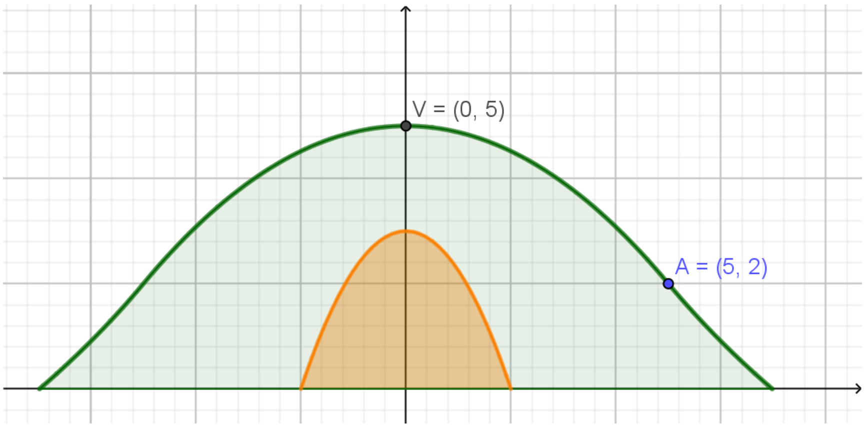
b) Dopo aver verificato che $a = 12$ e $b = -3$, rappresentare la curva γ.

c) Determinare l'area del regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dall'asse delle ordinate e dalla retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x = -2$.

PROBLEMA 2

Il profilo di un capannone di un parco giochi è riportato in figura, ha una simmetria rispetto all'asse y ed è la rappresentazione, solo per i punti del primo quadrante, della funzione seguente (in cui le coordinate sono espresse in metri):

$$y = \begin{cases} ax^2 + b & 0 \le x \le 5 \\ c \ln x + d & x > 5 \end{cases}$$



a) Determina i valori dei parametri ricavando le informazioni dal grafico e sapendo che il profilo non presenta punti angolosi. Verifica che l'equazione della funzione può essere scritta nel seguente modo:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{3}{25}x^2 + 5 & 0 \le x \le 5 \\ 2 - 6\ln\dfrac{x}{5} & x > 5 \end{cases}$$

b) Ricava l'equazione della retta tangente nel punto A, disegna il grafico della funzione che rappresenta la pendenza del profilo del tendone e studiane la derivabilità.

c) Le due facciate (anteriore e posteriore) del capannone presentano una porta centrale di forma parabolica di altezza 3 metri e larghezza di quattro metri alla base. Volendo dipingere le due facciate del capannone con una vernice che costa 20 euro al metro quadro, qual è la spesa da sostenere?

QUESTIONARIO

1) Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$$

2) Data la funzione: $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 - k\,x + k & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0\,;2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

3) Calcolare il valore medio della funzione reale $f(x) = ln\,(x)$ nell'intervallo $[\,1;\ e^2\,]$; trovare il punto che soddisfa la tesi del teorema della media.

4) Determina i coefficienti a, b, c della funzione $f(x) = a\,x^4 + b\,x + c$ in modo che la derivata terza di $f(x)$ sia: $f'''(x) = 12\,x$ e che il grafico della funzione passi per il punto $P(0\,;1)$, avendo come tangente in P la retta di equazione $y = 2x + 1$

5) Siano A e B i punti di intersezione tra la curva γ di equazione $y = 4x^2 - 12x + 9$ e la retta r di equazione $x - y = 0$. Determinare il punto P dell'arco AB della curva γ che si trova a distanza massima dalla retta r.

6) Calcola il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della regione di piano delimitata dalla curva della funzione $y = \sqrt{3x - x^2}$ e dall'asse delle ascisse.

7) Determina il campo di esistenza e gli asintoti della funzione $y = \sqrt{x^2 - x}$.

8) Dopo aver dato la definizione di continuità e derivabilità in un punto, studiare tali proprietà della seguente funzione $y = \begin{cases} x^2 - 1 & se\ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & se \quad x \ge 1 \end{cases}$