Commissione…..

Esame di Stato 2021-2022 Sessione ordinaria

Liceo Scientifico e Liceo Scienze Applicate

Seconda prova

Il/la candidato/a risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti tra quelli proposti.

Problema 1

Considera le curve di equazione:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+ax}{x^2+a}} \qquad \text{con } a > 0.$$

1. Determina le coordinate dei punti A e B (con $x_A < x_B$) per i quali passano tutte le curve del fascio e verifica che tutte sono tangenti in A alla stessa retta t. Scrivi l'equazione di t.
2. Determina il valore del parametro a per il quale la funzione ha un punto stazionario in $x = 3$. Assumi, d'ora in avanti, di avere $a = 3$, studia la funzione corrispondente fino alla derivata prima e tracciane il grafico.
3. Detta s la retta tangente al grafico della curva in B, calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle rette s e t. Esprimi il risultato in gradi e primi sessagesimali.
4. Deduci da f le caratteristiche principali della funzione $g(x) = \ln f(x)$ e tracciane il grafico. Scrivi l'espressione analitica della funzione g e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di g e dalla retta r tangente al suo grafico in $x = 0$.

Problema 2

Considera la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = \frac{4x}{a + x^2},$$

dove a è un parametro reale.

1. Discuti la funzione $f_a(x)$ al variare di $a \in R$ evidenziandone, in particolare, dominio, simmetrie, asintoti, massimi, minimi.
2. Determina il valore di a in corrispondenza del quale la funzione ha un massimo assoluto di ordinata 2; verificato che risulta $a = 1$, traccia il grafico della corrispondente funzione $f(x)$ e deduci da questo il grafico della funzione derivata prima e quello della funzione y=|f(x)|
3. Determina il valore del parametro k positivo per il quale l'area sottesa al grafico di

   $\varphi(x) = \frac{1}{4} f(x)$ nell'intervallo [0; k] vale 1.

Quesiti

Quesito 1

Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione $F(x) = asen^3x + bsenx + 2x$ sia una primitiva della funzione $f(x) = cos^3x - 3cosx + 2$

Quesito 2

Data la funzione: $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 3x^2 - ax - 3 & se\ x < 1 \\ x - \frac{1}{x} & se\ x \geq 1 \end{cases}$

Dimostra che è continua per ogni valore reale di a . Determina a in modo che sia derivabile in R

Quesito 3

Dimostra che la seguente equazione $x - 2 + lnx = 0$ in [1,4] ha un'unica soluzione

Quesito 4

Inscrivere un rettangolo nella parte di piano compresa tra la parabola di equazione $y = -x^2 + 2$ e l'asse x in modo che sia massimo il volume del cilindro che si ottiene con una rotazione completa intorno all'asse y.

Quesito 5

Dare la definizione di integrale indefinito e calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x-3}{x^2 - x - 2} dx .$$

Quesito 6

Calcola $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2} dt}{6x^3}$

.

Quesito 7

Calcolare il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse x della parte di piano limitata dalla curva $y=e^x$, dalle rette $x=a$ (con $a<0$) , $x=0$ e dall'asse x.

Quesito 8

Enunciare il teorema di Lagrange. Come si interpreta da un punto di vista geometrico? Stabilire se per la funzione $y = \frac{x+3}{2x-5}$ sussistono le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo [0,2] e determinare gli eventuali punti che verificano il teorema.

Durata massima della prova 5h

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9)