

## PROBLEMA 1

Assegnata la famiglia di funzioni  $f(x) = \frac{a+\ln x}{b+\ln x}$

1. Dimostrare che per ogni valore di  $a$  e  $b$  le funzioni non ammettono punti estremanti.
2. Posto  $a=2$  e  $b=1$ , studiare  $g(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$  per  $x>0 \wedge x \neq e^{-1}$
3. Se  $g(x)=k$  per  $x=0$ , determinare il valore di  $k$  in modo tale che  $g(x)$  sia continua in  $x=0$ .
4. Verificare se la funzione è invertibile.
5. Calcolare  $\int \frac{2+\ln x}{(1+\ln x)x} dx$  nell'intervallo  $(e^{-5}; e^{-2})$

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita, per tutti gli  $x$  reali, da  $f(x) = \frac{16}{8+x^2}$ .

- a) Si studi  $f$  e se ne disegni il grafico  $\Phi$  in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivono le equazioni delle tangenti a  $\Phi$  nei punti  $P(-2\sqrt{2}; 1)$  e  $Q(2\sqrt{2}; 1)$  e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo.
- b) Sia  $\Gamma$  la circonferenza di raggio 1 e centro  $(0;1)$ . Una retta  $t$ , per l'origine degli assi, taglia  $\Gamma$ , oltre che in O, in un punto A e taglia la retta di equazione  $y = 2\sqrt{2}$  in un punto B. Si provi che, qualunque sia  $t$ , l'ascissa  $x$  di B e l'ordinata  $y$  di A sono le coordinate  $(x; y)$  di un punto di  $\Phi$ .
- c) Si calcoli l'area della regione R compresa tra  $\Phi$  e l'asse  $x$  sull'intervallo  $[0; 2\sqrt{2}]$ .

## QUESITI

1. Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(x - 6)}$
2. Un triangolo ha area 12 e due lati che misurano 4 e 6. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
3. Si calcoli  $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}$
4. La posizione di una particella è data da  $s(t) = 16 \left( e^{\frac{t}{2}} + t^2 - 3 \right)$  espressa in metri. Qual è la sua accelerazione al tempo  $t=4$  s?
5. Assegnata la parabola di equazione  $y = -x^2 + 4x$

- a. Determinare nella regione di piano delimitata dalla parabola e l'asse delle x il rettangolo di perimetro massimo.
6. Assegnata  $f(x)=\ln(4x+1)+\ln(4x-1)$ , verificare se è invertibile e, in caso di risposta positiva, determinarne l'inversa.
7. Sia  $f(x)=x^2+|x-1|$ . Nell'intervallo in  $[0;2]$  è verificato il teorema di Rolle ?
8. Verifica se la funzione  $f(x)=\frac{x-\tan x}{x^2}$  presenta dei punti di discontinuità ed eventualmente risolvili.