



## SECONDA PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2022

### Liceo scientifico - Commissione NALI02127

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a quattro degli otto quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

### PROVA A

#### PROBLEMA 1

Si considerino un cerchio di raggio  $r$  ed una sua corda  $MN$  uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

1. Si indichi con  $P$  un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi  $M$  e  $N$ , si consideri il rapporto:

$$\frac{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2}{\overline{MN}^2}$$

e lo si esprima in funzione di  $x = \widehat{tgpAB}$ .

2. Si studi la funzione  $f(x)$  così ottenuta e si tracci il suo grafico  $\gamma$ , indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Detto  $C$  il punto d'intersezione della curva  $\gamma$  con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a  $\gamma$  in  $C$ .
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva  $\gamma$ , la suddetta tangente e la retta di equazione  $x = k$ , essendo  $k$  l'ascissa del punto di massimo relativo.

#### PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita sull'insieme  $R$  dei numeri reali da:

$$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{x^2 + bx + 4},$$

dove  $a$  e  $b$  sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che  $f$  ammette come asintoti le rette di equazione  $y=0$  e  $x=1$ .

1. Si provi che  $a = 0$  e  $b = -5$ .
2. Si studi su  $R$  la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$ , e se ne tracci il grafico  $\Gamma$  nel sistema di riferimento  $Oxy$ .
3. Si calcoli la retta  $t$  tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa  $x = 0$ .
4. Si determinino, se esistono, le coordinate degli ulteriori punti di intersezione tra  $\Gamma$  e  $t$ .
5. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da  $\Gamma$ , dall'asse  $x$ , dalla retta  $x=6$  e dalla retta  $x=8$ .

## QUESTIONARIO - PROVA A

1. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log_{\cos x}(x^2 - 5x + 6), \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = 3ax^3 + 2ax^2 - x,$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo, determinare i valori di  $a$  per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

3. Si consideri la curva di equazione

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.

4. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

si dica se essa è continua nel suo dominio.

5. Sia data la funzione  $f(x) = ax^3 + (a - 1)x$ , definita nell'intervallo chiuso  $[-1; 2]$ , si determini il valore di  $a$  per il quale sia applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui essa verifica la tesi del teorema stesso.

6. Si calcoli, con la precisione di una cifra decimale, lo zero della funzione  $f(x) = 2x + e^x$  nell'intervallo  $[-1; 0]$ .

7. Quanti colori si possono formare mediante le combinazioni dei sette colori fondamentali dello spettro?

8. Tra tutti i prismi a base quadrata con la stessa superficie totale  $S = 2022 \text{ m}^2$ , si determini quello di volume massimo.