MINISTERO DELL'ISTRUZIONE
UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER IL LAZIO
ISTITUTO D'ISTRUZIONE SUPERIORE "FERMI"

Piazza TRIESTE 1 - 04024 GAETA – cod. mec. LTIS02300N Codice fiscale 90060370591
e-mail: ltis02300n@istruzione.itposta certificata: ltis02300n@pec.istruzione.it –
Liceo Scientifico – LTPS023014 – P.zza Trieste 1 - tel. 0771-460247 461780, FAX 0771-462104
Istituto Tecnico Economico– LTTD02301X - Via Calegna, 77 – 0771-471560

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo – LI02 – SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA

Il/la candidato/a risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $f(x)$ così definita:

$$f(x) = ax \cdot e^{bx}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, si discuta se nel grafico della funzione $f(x)$ è presente un punto di massimo o di minimo. Si determinino i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $f(x)$, in un piano cartesiano xy, ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, che sia $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, si studi la funzione
$$f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$
e se ne tracci il grafico verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
Si determini l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Si deduca dal grafico di $y = f(x)$ quello di $y' = f'(x)$, spiegando il ragionamento seguito. Si riporti sullo stesso piano cartesiano xy il grafico della simmetrica della funzione $f(x)$ rispetto all'asse y dopo averne scritto l'equazione.

4. Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$, dalla retta tangente al grafico nel punto F, e dall'asse y.

PROBLEMA 2

Sia assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b \ln x}{x}$$

1. Si determinino i valori di a e $b \in R$, sapendo che la funzione assegnata ha un punto estremante relativo di coordinate P $\left(\sqrt[3]{e} ; \frac{3}{\sqrt[3]{e}} \right)$.

2. Verificato che $a = 2$ e $b = 3$, si sviluppi lo studio completo della funzione, tracciandone il grafico.

3. Si verifichi la presenza nel grafico di un punto di flesso. Si definiscano le sue caratteristiche e si individui, sia analiticamente che graficamente, l'equazione della tangente inflessionale. Si riporti sullo stesso piano cartesiano xy il grafico della simmetrica della funzione $f(x)$ rispetto all'asse y dopo averne scritto l'equazione.

4. Si determini l'area della parte finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dalla retta tangente alla curva nel punto di flesso e dall'asse x.

QUESTIONARIO

1. E' data la funzione $f(x) = 2a\cos x - a^2$definita nell'intervallo $[0, \pi]$.
   Si verifichi che, se la retta tangente nel punto di flesso incontra l'asse delle y nel punto $P\ (0,2\pi - 4)$, allora uno dei valori assunti da a è 2.
   Per tale valore del parametro a si determini il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x arctgx}$.

2. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{b-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

   Si determinino i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione risulti derivabile in tutto il suo dominio. Dopo aver tracciato i grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$, discutere sull'esistenza di $f''(1)$.

3. Si determini l'equazione della cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$ avente punti estremanti in $A(-1; 4)\ e\ B(1; 0).$ Si rappresenti la funzione ottenuta e si determini l'area della parte finita di piano individuata dal grafico della funzione e dall'asse x.

4. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x+1}$ più vicino al punto di coordinate $(3; 0)$.

5. Di quale delle seguenti equazioni è soluzione la funzione $y = \ln(x-3)$?
   - $(x-3)y'' - (x-3)^2y' + 2 = 0$
   - $xy'' - (x-3)y' + x + 2 = 0$
   - $(x-3)^2y'' - (x-3)y' + 2 = 0$
   - $x^2y'' + y' + 3x - 9 = 0$

6. Si disegni il grafico della funzione: $f(x) = \left| \frac{-2x-1}{x-3} \right|$.
   Si dica se negli intervalli $[-2;1]$ e $[4;6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e, in caso affermativo, si trovino i punti la cui esistenza è prevista dal teorema.

7. Si determini l'area della regione finita di piano limitata dall'asse y e dalle curve di equazione $y = e^x$ e $y = 2e^{-x}$.

8. Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & se\ x < 0 \\ 2e^{\frac{ax+b}{x-2c}} & se\ x \geq 0,\ \ x \neq 2c \end{cases}$$

Si determinino i valori dei parametri a, b e $c \epsilon R$ in modo tale che $f(x)$ sia: continua in $x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2e$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0$.

Durata massima della prova: 6 ore

E' consentito l'esclusivo utilizzo delle calcolatrici elettroniche e/o grafiche riportate nell'elenco aggiornato dal MI redatto in data 25/03/2022 con la nota prot. 7376.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.