MINISTERO DELL'ISTRUZIONE
UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER IL LAZIO
LICEO SCIENTIFICO - CLASSICO - SCIENZE UMANE
"LEONARDO DA VINCI"
Via Pantanelle s.n.c. – 04019 Terracina (LT)
Tel. 0773-727931 – 727888 - fax 0773-723067
C.F. 80005830593 – C.M. LTPS04000R
e-mail: ltps04000r@istruzione.it – ltps04000r@pec.istruzione.it
www.liceoterracina.edu.it

ESAMI DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

PROVA DI MATEMATICA

A. S. 2021/ 2022

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico.

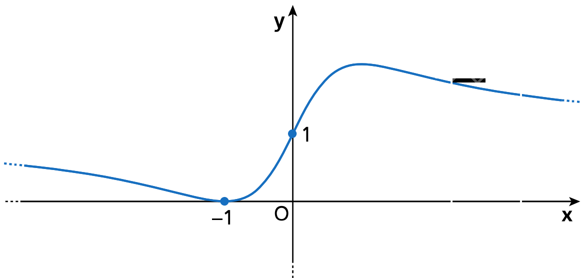
Problema 1.

Per ogni $k \in R^+$, considera le funzioni $f_k(x) = \frac{2x}{x^2+k} + 1$ e $g_k(x) = (x+k)^2 e^{-x}$, definite in R.

a) Verifica che per un particolare valore di k le ascisse dei punti di massimo relativo e quelle dei punti di minimo relativo delle due funzioni coincidono.

b) Appurato che deve essere $k = 1$, verifica che i grafici delle due funzioni sono tangenti all'asse x nello stesso punto.

c) Osserva il grafico in figura e stabilisci quale tra le funzioni $f_1(x)$ e $g_1(x)$, può corrispondere alla funzione rappresentata nel grafico, motivando la risposta.



d) Traccia nello stesso piano cartesiano anche il grafico dell'altra funzione.

e) Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse y del trapezoide individuato dal grafico della funzione $f_1(x)$ e dall'intervallo dell'asse x [0,1].

Problema 2.

Data la funzione definita, continua e derivabile in $\boldsymbol{R}$:

$f(x) = \frac{ax}{1+b^2x^2}$ con a, b parametri reali positivi

a) Dimostra che, per qualsiasi valore dei parametri a e b, la funzione $f(x)$ ammette un solo massimo relativo e un solo minimo relativo, è simmetrica rispetto all'origine O del sistema di riferimento e ammette l'asse x come asintoto orizzontale.

b) Determina i rispettivi valori di a e b per i quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $f(x)$ presenti il massimo relativo in corrispondenza di $x = 2$;
- il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ nell'origine sia 2.

c) Stabilito che i valori di a e b richiesti nel punto precedente sono $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$, sia $f(x)$ la funzione corrispondente. Studia e rappresenta graficamente la funzione $f(x)$ determinando le coordinate degli eventuali massimi e minimi assoluti e dei punti di flesso.

d) Dal grafico della funzione $f(x)$ deduci il grafico qualitativo della funzione derivata prima $f'(x)$ spiegando il suo legame con il grafico della funzione $f(x)$.

e) Calcola l'area della regione finita del piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette tangenti al grafico nell'origine O e nel punto di massimo M.

Questionario.

1. Data la funzione

$$f(x)=\int_a^x \frac{e^{t-a}}{\sqrt{t^2+3}}\,dt,$$

dimostra che è monotona crescente in tutto il suo dominio. Determina poi, motivando adeguatamente la risposta, quale tra le seguenti rette può essere la tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x=a$ e ricava di conseguenza il valore di a:

$$r_1 : y=\frac{1}{2}x-1; \qquad r_2 : y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

2. Calcola il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse della regione finita di piano delimitata dalle seguenti curve:
   $y=0,\ \ y=-x^2+4x,\ \ \ y=x^2-2x.$

3. Considera la funzione $y=\frac{2-x}{x+1}$ e tracciane il grafico. Sull'arco di curva contenuto nel primo quadrante, determina il punto P tale che, dette H e K rispettivamente le sue proiezioni sull'asse x e sull'asse y, il rettangolo $OHPK$ abbia area massima, essendo O l'origine degli assi.

4. Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-(b+3)x+2a+4, & \text{se } x\le 3 \\ a\ln(x-2)\,, & \text{se } x>3 \end{cases}.$$

Determina per quali valori dei parametri a e b la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $x=3$.
Per tali valori di a e b verificare se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1;5]$, determinando l'eventuale ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

5. Stabilisci per quale valore del parametro k la funzione $f(x)=\frac{x+k}{x^2-4}$ ha valor medio uguale a $-\frac{ln48}{4}$ nell'intervallo [0, 1].

6. Dimostra che l'equazione $xlnx+\frac{1}{2}x-1=0$ ammette una sola soluzione nell'intervallo $[1,e]$.

7. Sia data la famiglia di funzioni reali:

$$f_k(x) = \begin{cases} 9x^3 - 5kx^2 - 6k^2x + k^3, & x \leq k \\ \dfrac{4kx^2 + (4+3k)x + 3}{x^2+1} & x > k \end{cases}$$

con k parametro reale arbitrario. Mostrare che esiste una e una sola di tali funzioni che risulta continua in $\boldsymbol{R}$.

8. Si consideri la famiglia di funzioni algebriche

$$f_k(x) = \frac{kx^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

con $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$

Si dimostri che per ogni $k \neq 0$ il grafico della funzione f_k interseca quello della sua funzione derivata f'_k in un punto A la cui ascissa è indipendente da k. Si determinino le coordinate di A.