UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER IL LAZIO

LICEO SCIENTIFICO STATALE
VITO VOLTERRA

00043 Ciampino (Roma) – Via dell'Acqua Acetosa, 8/A
sito web: liceovolterra.gov.it Tel. 06/121126380 Fax 06/7963473
CF 80200130583 – C.M. RMPS29000P – e-mail: rmps29000p@istruzione.it

NOME___________________________COGNOME_________________________CLASSE_____

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

È data la famiglia di funzioni $f(x) = \frac{kx^2-10kx+9k}{x}$ con $k \in R - \{0\}$

1) Dopo aver verificato che le ascisse degli zeri e dei punti stazionari di $f(x)$ sono indipendenti dal valore del parametro k, determinare il valore di k in modo che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente al grafico della funzione $g(x) = -8\, ln\,(x^2 - x + 1)$ in $x = 1$, spiegando brevemente cosa si intende per curve fra loro tangenti.

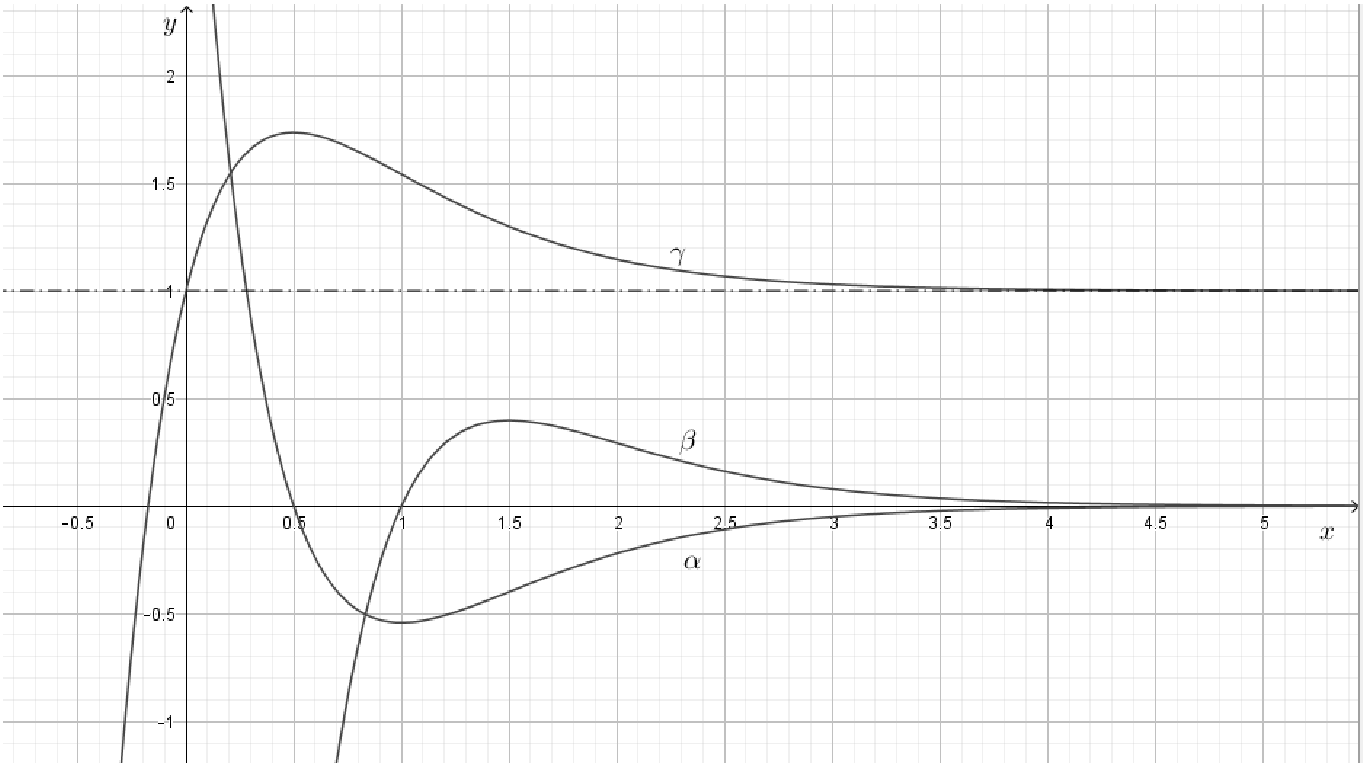
2) Verificato che $k = 1$, eseguire lo studio completo della funzione $f(x)$, calcolare l'equazione della retta t tangente alla funzione $f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$ e rappresentare in un grafico la funzione $f(x)$, la retta t e un grafico probabile di $g(x)$ argomentando opportunamente *(non è richiesto lo studio completo della funzione $g(x)$).*

3) Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dalla retta r passante per i punti R(-1; -1) e S(5; 2). Enunciare il teorema di Lagrange, applicarlo alla funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo [1, 18] e determinare il punto di cui il teorema assicura l'esistenza.

4) Considerata la parte del grafico della funzione $f(x)$ compresa nel quarto quadrante, indicare con A e B i punti in cui essa interseca la retta di equazione *y*=*h*. Determinare *h* in modo che sia massima l'area della superficie del rettangolo ottenuto proiettando A e B sull'asse x.

PROBLEMA 2

Nella **<u>Figura1</u>** sono rappresentati: il grafico di una funzione $f(x)$, il grafico della sua derivata prima $f'(x)$ e il grafico della sua derivata seconda $f''(x)$.



<u>Figura 1</u>

1. Dire quale fra le curve α, β e γ è il grafico della funzione $f(x)$, quale è il grafico della funzione $f'(x)$ e quale è il grafico della funzione $f''(x)$, argomentando le scelte fatte in base alla teoria studiata.

2. La funzione $f(x)$ individuata nel grafico ha la seguente espressione:
   $f(x) = a + b \cdot x \cdot e^{-kx}$ con $a, b, k \in R^{+} - \{0\}$. Determinare i valori dei parametri deducendo le informazioni dal grafico e sapendo che la retta tangente alla funzione $f(x)$ nel suo punto di flesso ha coefficiente angolare $m = -\frac{4}{e^2}$.

   Verificato che $a = 1$, $b = 4$, $k = 2$, determinare le equazioni degli asintoti e le coordinate degli eventuali punti estremanti e di flesso della funzione $f(x)$. Argomentare sulla coerenza tra i risultati ottenuti e il grafico dato.

3. Scrivere l'espressione analitica della funzione area $S(h)$ della regione finita di piano compresa tra la funzione $f(x)$ e il suo asintoto orizzontale nell'intervallo $[0; h]$ con $h > 0$; calcolare poi il $\lim_{h \to +\infty} S(h)$.

4. Studiare la derivabilità della funzione $g(x) = |f(x) - 1|$ e disegnarne un grafico probabile deducendolo da quello della funzione $f(x)$. Enunciare il teorema di Rolle, dimostrare che esso non è applicabile a tale funzione $g(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ e dire se esiste un intervallo in cui esso è applicabile argomentando la risposta.

QUESITI

1. Determinare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $y = ln(x^2 - 3)$ nei punti di intersezione con l'asse x. Calcolare, inoltre, l'area della regione di piano delimitata dalle rette tangenti trovate e dall'asse x.

2. Tracciare il grafico della funzione $y = e^{-x}$ e trovare l'equazione della retta t tangente al grafico nel punto generico $T(k, e^{-k})$ con $k > 0$. Indicare con C il punto di intersezione della retta t con l'asse x, con O l'origine del sistema di assi cartesiani e con A la proiezione di T sull'asse y; per quale posizione di $T(k, e^{-k})$ con $k > 0$ il trapezio di vertici OATC ha l'area massima?

3. Le "pantere" e le "tigri" sono due squadre comprendenti in tutto 11 persone tra ragazze e ragazzi vincitori di una gara scolastica. La squadra delle "pantere" è formata da 3 ragazze e 3 ragazzi mentre le "tigri" sono 2 ragazze e 3 ragazzi. Bisogna scegliere due rappresentanti fra le "pantere", qual è la probabilità che si tratti di due ragazze?
Due alunni di una delle squadre presenteranno gli esiti della gara all'assemblea d'Istituto e per scegliere equamente si lancia una moneta: testa per le "pantere" e croce per le "tigri". Se alla fine le rappresentanti sono due ragazze, qual è la probabilità che siano "pantere"?

4. Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x (sen(t) + \cos(t) - 1)dt}{3x^2}$

5. Considerata la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (b+3)x + 2a + 4, & \text{se } x \leq 3 \\ a \ln(x-2), & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$
Determinare per quali valori dei parametri a e b la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $x = 3$.

6. Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ e determinare il valore di x interno all'intervallo in cui tale valore è assunto.

7. Dati i punti $A(2,0,3), B(0,0,-1), C(-3,2,-4), D(-1,2,0)$ determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta r passante per D e perpendicolare al piano α.

8. Studiare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$. Dopo aver verificato che $f(-1) \cdot f(-3) < 0$, spiegare se per questa funzione è valido il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[-3; -1]$.