LICEO SCIENTIFICO STATALE “G. VAILATI” - GENZANO DI ROMA

Esame di Stato a.s. 2021/2022

SECONDA PROVA

23 giugno 2022

Candidato/a ______________________________

Classe ______________________________

Tempo a disposizione: **5 ore effettive**

Strumenti ammessi: Calcolatrici – Per i modelli fare riferimento alla Nota 5641 del30 marzo 2018, alla Nota 30 ottobre 2019, n. 22274 e alla Nota 7673 del 25 marzo 2022.

Dizionario della lingua italiana: esclusivamente messo a disposizione dall’istituto.

Avvertenze:

- *Non sono ammessi cellulari, smartphone, smartwatch e ogni altro dispositivodi collegamento con l’esterno.*
- *I fogli da utilizzare durante la prova saranno forniti dall’istituto*
- *Tutti i fogli devono contenere il cognome e il nome del candidato.*
- *Non è consentito la consegna di parti di svolgimento scritte a matita o conqualsiasi altro strumento cancellabile.*
- *Non è consentito l’uso di alcun tipo di correttore.*
- *Non sono ammessi sussidi didattici, fatta eccezione per gli autorizzati.*
- *Non è consentito lasciare l’istituto prima di 3 ore dall’inizio della prova.*
- *Non è consentito uscire durante l’intervallo scolastico*
- *Gli orari di uscita/rientro per l’utilizzo dei servizi igienici saranno registrati suappositi fogli.*
- *Prima di uscire lo studente deve consegnare il proprio compito con tutti i fogliutilizzati.*
- *Il punteggio massimo totalizzabile è di 10 punti, ed è attribuito in base allagriglia di valutazione/20.*

VALUTAZIONE TOTALE / 20 **(con tabella di conversione in decimi)**

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti del questionario.

Problema 1

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(6-x)}{2(2+x)} & x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 16x + a}{(x-4)^2} & 0 \leq x \leq 3 \\[2ex] e^{-b(x-3)} & x > 3 \end{cases}$$

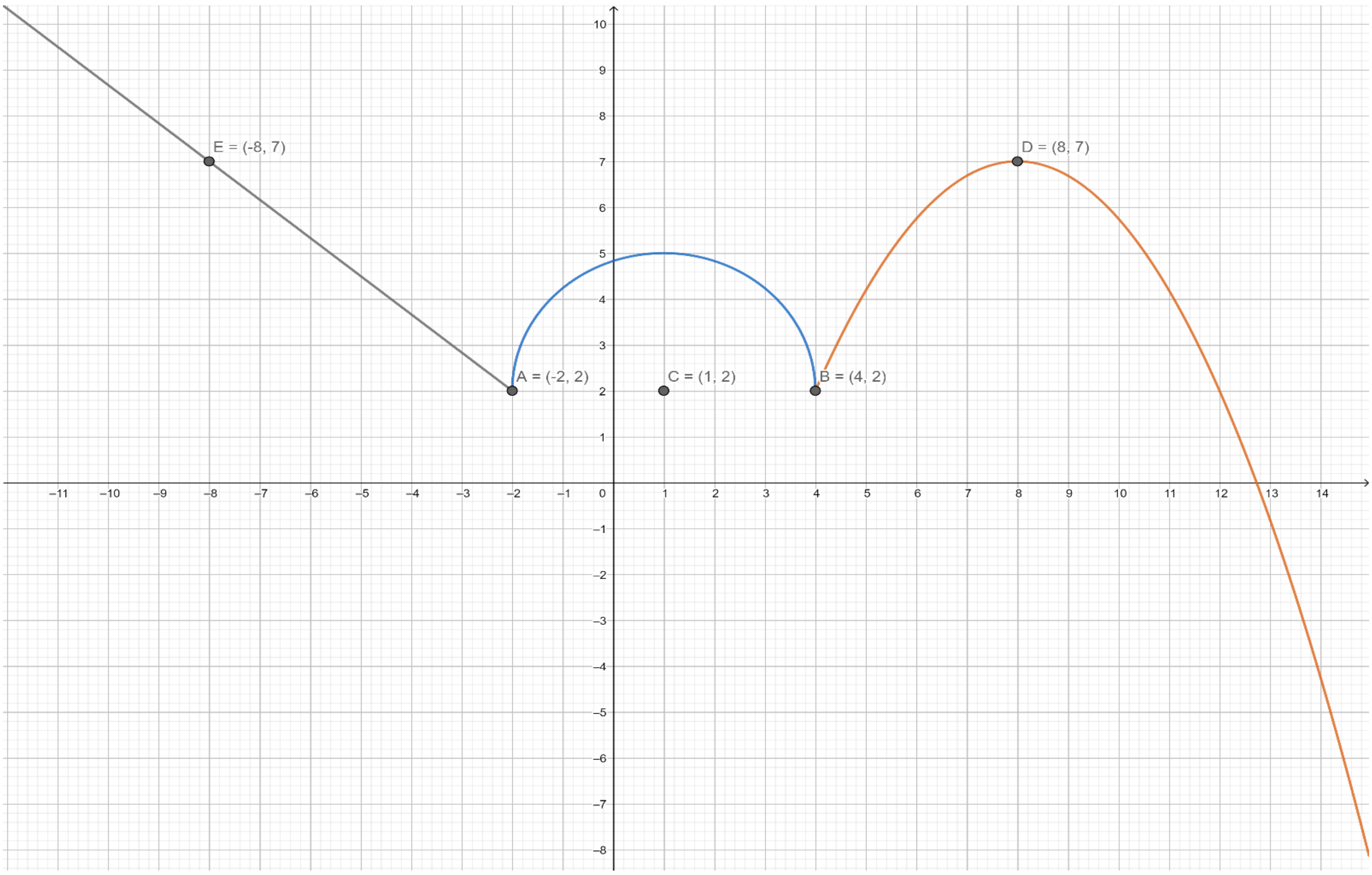
a) Determinare i parametri a e b tali che *f(x)* sia derivabile in $(0, +\infty)$ e *f(0)* $= \frac{5}{2}$

b) Verificato che i valori richiesti sono $a = 40$ e $b = 8$ studiare la funzione così ottenuta e rappresentarla graficamente. Stabilire inoltre dall'analisi del grafico se *f(x)* è continua in $\mathbb{R}$.

c) Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di flesso di ascissa 1.

d) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra la funzione e la retta $y = 1$ nel primo quadrante.

Problema 2



a) Determina la funzione definita a tratti f(x), ricavabile dai dati riportati in figura, tenendo conto che è composta da una semiretta, una semicirconferenza ed un arco di parabola.

b) Dimostra che la funzione è continua in tutto il suo dominio R e quali sono, se ci sono, i suoi punti di non derivabilità dando loro il corretto nome. Ricerca i massimi, i minimi e gli eventuali flessi. Verifica se esistono asintoti.

c) Prolungando la retta dal punto A dimostra che interseca la curva f(x) nel punto F di ordinata -13. Verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo tra i punti A e B e di Lagrange nell'intervallo tra i punti B e F. In caso affermativo trova i punti la cui esistenza è assicurata dai due teoremi.

d) Dimostra che l'area compresa tra la retta del punto precedente e la curva f(x) tra i punti A e F è uguale a $\frac{9}{2}\pi + 135$

Quesiti

1) Svolgere i seguenti limiti esplicitando ove necessario i passaggi e l'applicazione di limiti notevoli e/o teoremi.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x^2)}{(1-\cos x)\tan x} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{2022}}{e^{-x}}$$

2) Calcola l'area della regione di piano delimitata dalla funzione

$$y = e^x \sin x$$

nell'intervallo $[o;\pi]$.

3) Determina il punto P appartenente alla parabola di equazione

$$y = x^2 - 1$$

per cui la somma dei quadrati delle distanze tra P e i punti $A(0,-1); B(4;0)$ risulta minima.

4) Verifica che la funzione $y = e^{-x^2+x+1}$ è soluzione della seguente equazione.

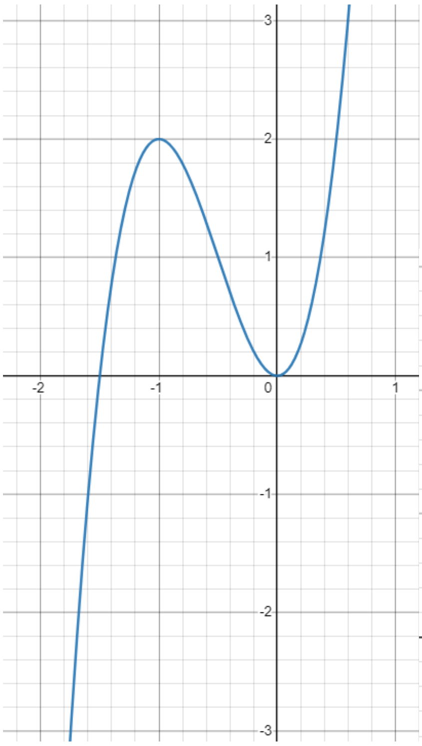
$$y'' + y' = y(4x^2 - 6x)$$

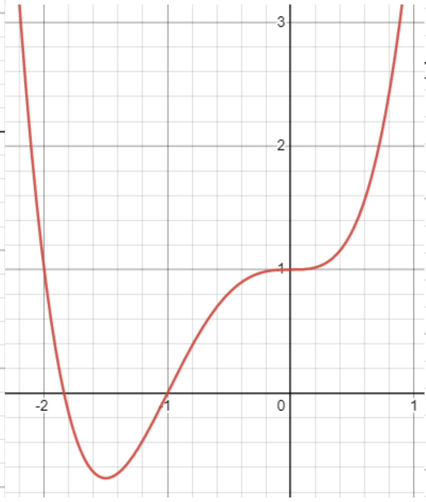
5) Determina per quali valori di a e b la seguente funzione risulta continua e derivabile su tutto R e per quei valori tracciane il grafico

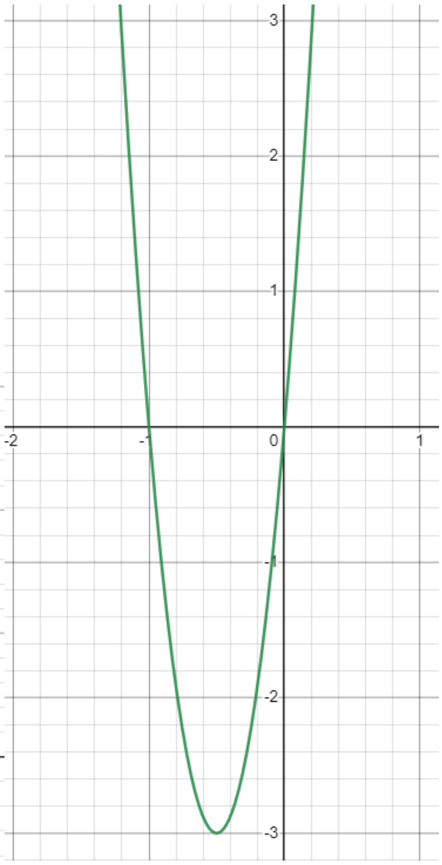
$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} + b, & x < 0 \\ x^2 + \frac{b}{2}x + a, & x \geq 0 \end{cases}$$

6) Dato il grafico delle seguenti tre funzioni

$f(x)$ g(x) h(x)







determina, argomentando, quale delle seguenti affermazioni è vera

1) $f(x) = g'(x); h(x) = g'(x)$
2) $g(x) = f'(x); h(x) = f'(x)$
3) $f(x) = g'(x); h(x) = f'(x)$

7) Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^2 + 2x + 1, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

determina per quale degli intervalli $[0,3]$; $[1,3]$ risultano valide le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo calcola tutti i punti che verificano il teorema stesso.

8) Determina per quale valore del parametro k la funzione

$$y = x^2 - 4$$

forma nell'intervallo $[0, k]$, con k>2, una regione di spazio di area $\frac{23}{3}$ con l'asse delle x