Highlands Institute

Seconda prova, Matematica, V Liceo Scientifico

Anno scolastico 2021-2022

Testo A

Il candidato risolva a scelta uno tra i due problemi e quattro tra gli otto quesiti proposti.

Problema 1

Un epidemiologo sta studiando un modello matematico per descrivere la crescita dei casi di COVID-19 in Italia. Secondo il suo modello, la velocità con cui variano i casi è descritta dalla funzione

$$N'(t) = N_0 \frac{\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}}{[1+e^{-\alpha(t-t_0)}]^2}$$

dove t_0 è espresso in giorni, α in giorni^{-1}, N_0 in milioni e sono tutti parametri reali positivi (per brevità ometteremo le unità di misura). La funzione è definita per $t \geq 0$.

L'epidemiologo richiede il tuo aiuto per studiare il modello matematico e ha perciò preparato per te una lista di compiti.

1) Integra l'equazione differenziale e trova la soluzione generale per $N(t)$.
2) Sapendo che $\lim_{t\to+\infty} N(t) = N_0$, scegli la soluzione particolare. Qual è il significato di N_0?
3) Al tempo $t = t_0$ il modello prevede 1,75 milioni di casi e una velocità di crescita pari a $\frac{N_0}{40}$ casi al giorno. Quanto valgono N_0 e α?
4) La funzione ha un picco nella velocità di variazione per $t = 60$. Calcola t_0.
5) Noti i parametri, disegna il grafico di $N(t)$ e $N'(t)$, interpretandone il significato[1].

Un altro epidemiologo propone un modello differente, per cui la crescita dei casi è descritta dall'equazione differenziale

$$\tau \cdot M'(t) + M(t) - M_0 = 0$$

dove $M(t)$ e il numero di casi descritti da questo modello e τ ed M_0 sono parametri reali positivi.

---

[1] Non è necessario studiare la derivata terza.

6) Trova la soluzione particolare dell'equazione differenziale, sapendo che il modello prevede 0 casi al tempo $t = 0$.

7) Dopo aver verificato che la soluzione è $M(t) = M_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ e scelti $M_0 = 4$ e $\tau = 100$, calcola il limite di $M(t)$ a $+\infty$.

Le due curve così ottenute si intersecano in 3 punti. Il primo si trova approssimativamente in $t_1 = 0$ e il secondo si ha per $t_2 < 100$.

8) Trova il secondo punto di intersezione utilizzando un metodo opportuno di risoluzione approssimata (fermati alla prima cifra decimale certa).

9) Sapendo che il terzo punto di intersezione si ha per $t_3 = 210$, rappresenta qualitativamente le due curve sullo stesso grafico.

Uno stravagante artista contemporaneo decide di realizzare una scultura in gesso utilizzando la curva del modello Covid. Il progetto prevede di realizzare il solido ottenuto dalla rotazione della curva $N(t)$ o $M(t)$ intorno a x di 360° tra t_1 e t_3.

10) Aiuta l'artista a scegliere l'opera che richiede il volume minore di gesso.

Problema 2

Il tuo comune ha commissionato allo studio di progettazione Urban2000 il recupero di un capannone in stile modernista per realizzarne una sala polivalente ed uno spazio espositivo.

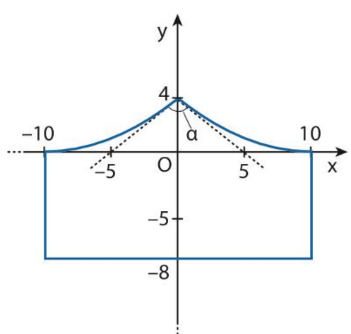

Figura 1

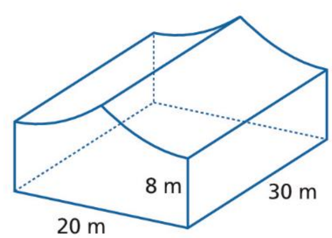

Figura 2

In figura 1 è rappresentata la forma della facciata; le dimensioni del capannone sono riportate, invece, in figura 2.

1) Individua, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni, definite nell'intervallo $[-10;10]$, può descrivere il profilo del tetto in modo più preciso:

$$f_1(x) = 4 - \sqrt{\frac{8}{5}|x|}\,; \qquad\qquad f_2(x) = \frac{1}{25}\left(|x| - 10\right)^2.$$

2) Verificato che la funzione è la $f_2(x)$, scrivi le equazioni delle due rette tangenti tratteggiate in figura 1 e valuta l'angolo α tra esse compreso.

3) Determina, inoltre, il volume occupato dall'edificio.

Il progetto prevede che al primo piano del capannone sia allestita una sala polivalente, in cui deve essere costruito un palco delimitato da un arco di parabola. La pianta della sala è rappresentata in figura 3 (le misure sono espresse in metri). Il piano di calpestio del palco viene rivestito con tre mani di una speciale vernice antigraffio, che può essere diluita con acqua fino al 15% del volume e costa 65 € a barattolo.

4) In base ai dati che puoi dedurre dal grafico, determina l'equazione dell'arco di parabola ed il costo minimo sostenuto per acquistare la vernice se quest'ultima, una volta diluita, ha una resa di 12 m^2 per barattolo.

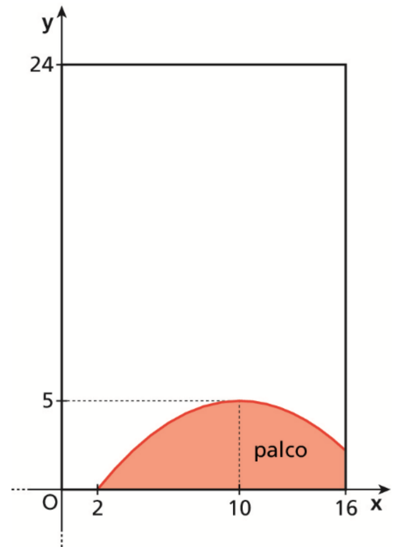

Figura 3

Il progetto prevede anche il recupero di cinque finestre per fornire luce alla sala. Ogni finestra ha la forma di un quadrato di lato 2 m sormontato da una zona il cui profilo superiore segue l'andamento della funzione $g(x) = |x|\sqrt{1 - x^2}$.

5) Disegna il grafico della funzione $g(x)$ e studia i punti di non derivabilità.
6) Sapendo che il restauro delle vetrate costa 220 €/m^2, stima la spesa per il recupero delle finestre arrotondando il risultato alle decine di euro.

Quesiti

1) Data la funzione $f(x) = e^x + cos(x) - sin(x)$, calcolare $f^{(2022)}(x)$, illustrando chiaramente il procedimento seguito.

2) Fra tutti i rettangoli di area a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

3) Determina per quali valori dei parametri reali a e b il grafico della funzione
$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx} - x$$

ammette come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = 2x + 1$.

4) Verifica che la funzione $y = axe^x + be^x + x$ soddisfa l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = x - 2$$

per ogni valore reale delle costanti a e b, quindi determina i valori di a e b per i quali si ha:

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0.$$

5) Senza fare uso del teorema di De L'Hospital, si calcoli:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\text{sen } x}{e^{\pi} - e^{x}}$$

6) Trova il valore di $a \in \mathbb{R}$ in modo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1 + x^2} dx = 5\pi$$

7) Calcola il limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{lnx}{ln(1-cosx)}$ e trova le equazioni di tutti gli eventuali asintoti verticali della funzione.

8) Mediante il teorema di Lagrange, dimostra che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$