Liceo Scientifico Statale 'I. Newton' di Roma

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
SESSIONE ORDINARIA 2022

Indirizzi: LICEO SCIENTIFICO - LICEO SCIENTIFICO CON OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.
E' consentito l'uso della calcolatrice grafica non programmabile.

Problema 1

Sia $f(x)$ la funzione

$$f(x) = ax^2 \ln\left(\frac{x}{b}\right),$$

con a, b parametri reali non nulli.
Si determini il valore dei parametri a e b in modo che il grafico della funzione abbia tangente nel punto $C(1;0)$ la retta r di equazione $y = 2x - 2$;

1. Dopo aver verificato che $a = 2$ e $b = 1$, si studi la funzione e se ne tracci il grafico γ;
2. Si trovino l'equazione della retta s tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = e^{-\frac{1}{2}}$ e si determini l'angolo formato dalle due tangenti r ed s;
3. Si determini l'area A della regione finita di piano delimitata da γ, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = 2$.
4. Si determini infine il volume del solido ottenuto mediante una rotazione completa della regione di piano, definita al punto precedente, intorno all'asse delle x.

Problema 2

Si determini la funzione $f(x)$ sapendo che:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 2e^{-x}(1-x),$$

1. Dopo aver verificato che la funzione $f(x)$ ha la seguente espressione analitica:

   $$f(x) = 2xe^{-x}$$

   Si studi la funzione e se ne tracci il grafico;
2. Si determini l'equazione della retta tangente e della retta perpendicolare al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$;
3. Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 2$;
4. Si determini il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa, intorno all'asse x, della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ e dall'asse x, con x appartenente all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Quesiti

1. Dopo aver enunciato il teorema della media per gli integrali definiti, si calcoli il valore medio della funzione $y = \frac{x^3-x+1}{x+1}$ nell' intervallo $[0;2]$.

2. Dopo aver provato che alla funzione $f(x) = \sqrt{-x^2+3x}$ è applicabile nell'intervallo $[1,2]$ il teorema di Rolle, si determinino i punti c per i quali il teorema è verificato.

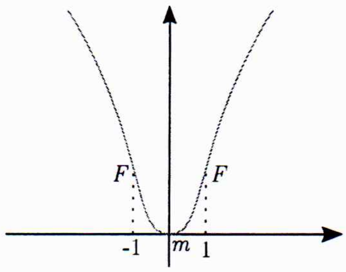
3. Si calcoli il seguente limite, applicando almeno due metodi distinti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\sin x}{1-\cos x-\sin x}$$

4. Data la funzione
$$f(x) = \arccos[\ln(2x-1)]$$
si determini il campo di esistenza e, se esiste, l'inversa di $f(x)$.

5. Si determinino i coefficienti a e b in modo che la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & x<4 \\ -x^2+10x-b & x \geqslant 4 \end{cases}$$
verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[2,6]$ e si individui quindi il punto x_0 in cui si verifica la tesi.

6. Si vuole costruire un contenitore cilindrico in metallo dal volume di 1 litro, utilizzando la minor quantità possibile di materiale. Quali devono essere le dimensioni del recipiente? Si esprima il risultato in dm.

7. Dato il grafico della funzione $f(x)$ nella seguente figura, si costruisca quello della funzione $f'(x)$:



dove sono stati indicati con F i punti di flesso e con m il punto di minimo.

8. Si dimostri che l'equazione $x^7+5x+5=0$ ha una sola radice reale.